



Уральский
федеральный
университет

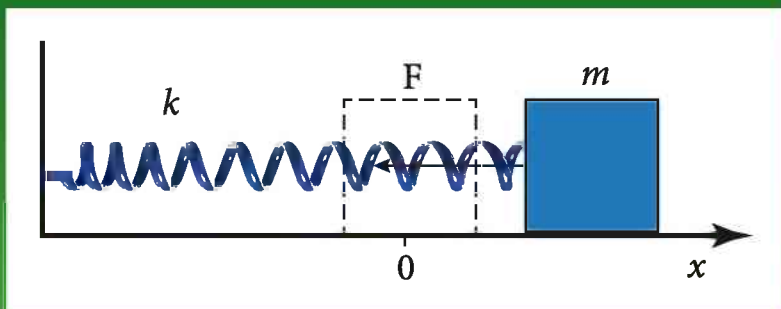
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт естественных наук
и математики

В. Г. ЧЕРНЯК

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ФИЗИКИ

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

В. Г. Черняк

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Рекомендовано
методическим советом Уральского федерального университета
в качестве учебного пособия для студентов вуза,
обучающихся по направлению подготовки 03.03.02 «Физика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2019

УДК 53(075.8)
Ч498

Рецензенты:

кафедра физики и математического моделирования
Уральского государственного педагогического университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор В.Е. Сидоров);

Г.Ш. Болтачев, доктор физико-математических наук
(Институт электрофизики УрО РАН)

Черняк, В. Г.

Ч498 Избранные главы физики : учеб. пособие / В.Г. Черняк ;
М-во науки и высш. образования Рос. Федерации, Урал. федер.
ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 283 с.

ISBN 978-5-7996-2530-6

В учебном пособии на элементарном уровне излагаются вопросы статики, упругих и температурных деформаций, гидростатики и гидродинамики, теплообмена, теории механических колебаний и волн, фотометрии. В конце каждой главы приведены вопросы для самоконтроля и примеры решения задач.

Предназначено студентам вузов в качестве введения к курсу общей физики. Часть материалов может быть использована в курсе общей физики и факультативном курсе физики в специализированных классах лицеев и гимназий.

УДК 53(075.8)

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	7
Глава 1. Статика	8
1.1. Силы в механике.	8
1.2. Механическое равновесие	14
1.3. Момент силы относительно оси вращения	16
1.4. Центр масс	18
1.5. Условия равновесия твердого тела	22
1.6. Центр тяжести	23
1.7. Устойчивость равновесия.	27
Контрольные вопросы	31
Примеры решения задач	32
Глава 2. Упругие и температурные деформации	44
2.1. Деформация	44
2.2. Закон Гука	46
2.3. Деформация сдвига.	50
2.4. Диаграмма растяжения	51
2.5. Тепловое расширение тел	54
2.6. Зависимость плотности от температуры	58
Контрольные вопросы	59
Примеры решения задач	60

Глава 3. Механика жидкости и газа	72
3.1. Гидростатика	73
3.2. Закон Паскаля	74
3.3. Закон Архимеда	76
3.4. Условие плавания тел	80
3.5. Гидростатическое взвешивание	81
3.6. Гидродинамика	82
3.7. Линии тока и траектории. Трубка тока	82
3.8. Уравнение неразрывности	84
3.9. Уравнение Бернулли	85
3.10. Применение уравнения Бернулли.	89
3.11. Вязкая жидкость.	102
3.12. Ламинарное и турбулентное течение	105
3.13. Течение вязкой жидкости в трубе	110
3.14. Движение тел в жидкости.	111
Контрольные вопросы	113
Примеры решения задач	114
 Глава 4. Влажность воздуха. Теплообмен	 124
4.1. Испарение и конденсация	125
4.2. Насыщенный пар.	126
4.3. Взаимные превращения пара и жидкости.	129
4.4. Критическая температура	132
4.5. Влажность воздуха	133
4.6. Теплообмен	135
4.7. Теплопроводность	136
4.8. Конвективный теплообмен. Теплоотдача.	144
4.9. Вынужденная конвекция	146
4.10. Свободная конвекция	150
4.11. Лучистый теплообмен	155
4.12. Сложный теплообмен	157
Контрольные вопросы	161

Примеры решения задач	162
Глава 5. Механические колебания и волны	172
5.1. Собственные колебания	173
5.2. Гармонические колебания	174
5.3. Понятие производной	177
5.4. Скорость и ускорение гармонических колебаний	180
5.5. Динамика гармонических колебаний	182
5.6. Колебания груза на пружине	183
5.7. Колебания математического маятника	185
5.8. Колебания тела, погруженного в жидкость	188
5.9. Превращение энергии при колебаниях	190
5.10. Затухающие колебания	193
5.11. Добротность колебательной системы	196
5.12. Вынужденные колебания. Резонанс	198
5.13. Механические волны.	204
5.14. Поперечные и продольные волны.	204
5.15. Фаза, период, частота и длина волны	206
5.16. Скорость распространения волны.	208
5.17. Бегущие и стоячие волны	212
5.18. Собственные колебания струны	219
5.19. Интерференция волн	221
5.20. Дифракция волн	224
5.21. Элементы акустики	228
5.22. Звуковые волны	229
5.23. Акустический резонанс	234
5.24. Рассеяние звука на препятствии	236
5.25. Поглощение звука	238
5.26. Особенность акустики помещений	242
Контрольные вопросы	243
Примеры решения задач	245

Глава 6. Фотометрия	264
6.1. Углы	265
6.2. Световой поток	266
6.3. Сила света	267
6.4. Освещенность	269
6.5. Светимость	270
6.6. Яркость.	270
6.7. Законы освещенности	272
Контрольные вопросы	275
Примеры решения задач	276
 Рекомендуемая литература	 282

От автора

В современных базовых школах на изучение физики отводится два часа в неделю. Этого явно недостаточно. Учитель вынужден обходить вниманием ряд вопросов и даже разделов физики. На решение задач времени вообще не остается. Поэтому студенты, поступившие по результатам ЕГЭ в вуз на естественно-научные и технические направления подготовки, оказываются не в состоянии освоить вузовскую программу общей физики и, следовательно, специальные дисциплины.

Для решения этой проблемы в учебный план департамента фундаментальной и прикладной физики УрФУ включена дисциплина «Введение в физику». Эта дисциплина читается в течение первого семестра. В ней рассматриваются те разделы физики, которые в базовых школах либо опускаются, либо изучаются поверхностно, — статика, механика деформируемых тел, гидроаэродинамика, влажность воздуха и механизмы теплообмена, распространение звука, фотометрия.

Теоретический материал излагается в пособии на элементарном уровне. Для его усвоения достаточно знания математики в объеме средней школы. Большое внимание уделяется решению задач, что способствует закреплению пройденного.

Предназначено данное учебное пособие студентам естественно-научных и технических направлений подготовки в качестве введения к курсу общей физики. Часть материалов может быть использована в курсе общей физики.

Глава 1

СТАТИКА

Ежедневно мы имеем возможность видеть, что тела сохраняют состояние равновесия, несмотря на приложенные к ним силы. Почему? При каких условиях равновесие может быть нарушено? На эти вопросы отвечает статика.

Статика — это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия тела или системы тел. При этом рассматривается, как правило, не материальная точка, а тело определенных размеров и определенной формы.

1.1. Силы в механике

В механике сила \mathbf{F} — векторная величина, которая выступает количественной мерой механического действия на данное материальное тело других тел. Результатом этого действия может быть изменение скорости движения точек тела или его деформация. Механическое взаимодействие между телами может происходить как при прямом их контакте (пример — столкновение бильярдных шаров), так и посредством создаваемых телами полей (пример — поле силы тяжести).

Сила считается заданной, если известны ее численное значение, направление действия и точка приложения. Единицей измерения силы в СИ является *ньютон* (Н), а в СГС — *дина* (дин), $1 \text{ дин} = 10^{-5} \text{ Н}$. Прямая, вдоль которой направлена сила, называется линией действия этой силы.

Если тело одновременно взаимодействует с несколькими телами, то вводят понятие результирующей силы как такой гипотетической силы, которая оказывала бы на рассматриваемое тело такое же действие, как все реально приложенные силы вместе взятые. Результирующая сила определяется векторной суммой всех действующих на тело сил:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i, \quad (1.1)$$

где n — количество приложенных сил.

Для сложения векторов используют правила параллелограмма, треугольника или многоугольника. Последнее применяют в случае, когда на тело действуют одновременно более двух разнонаправленных сил.

Напомним основные типы сил, встречающихся в задачах механики.

1. Сила упругости возникает в деформируемом теле, препятствуя изменению его линейных размеров и формы. При малых деформациях растяжения или сжатия вдоль оси x величина силы упругости пропорциональна смещению:

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad (1.2)$$

где x — смещение точки тела относительно положения равновесия; k — коэффициент упругости, зависящий от свойств материала и геометрии деформируемого тела; знак «минус» показывает, что сила упругости направлена в сторону, противоположную смещению x .

Разновидностями силы упругости являются **сила нормальной реакции опоры** N и **сила натяжения подвеса** T . Первая действует на тело, оказывающее давление на опору, перпенди-

кулярно поверхности опоры, а вторая — на тело, растягивающее подвес, вдоль подвеса (рис. 1.1).

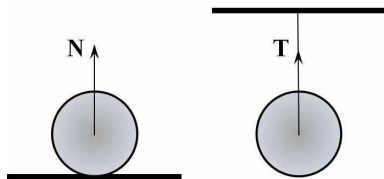


Рис. 1.1

2. Сила трения возникает при непосредственном соприкосновении твердых тел и направлена вдоль поверхности соприкосновения, препятствуя относительному смещению этих тел. Проявляется сила трения не только при относительном движении тел вдоль поверхности соприкосновения, но и в том случае, когда тела неподвижны.

Трение между сухими поверхностями тел называют *сухим трением*. Оно обусловлено шероховатостью поверхностей контактирующих тел. Даже при самой тонкой механической обработке поверхности, которая визуально кажется зеркально гладкой, средняя высота шероховатостей составляет около 10^{-5} см. Многочисленные бугорки цепляются друг за друга и препятствуют относительному движению контактирующих тел. При скольжении одного тела вдоль поверхности другого тела в бугорках возникают напряжения, которые приводят к разрыву молекулярных связей и постепенному разрушению поверхностей скольжения.

Различают три вида сухого трения: трение покоя, трение скольжения и трение качения.

Трение покоя и трение скольжения легко понять, рассмотрим приведенный ниже пример. Пусть к бруску, лежащему на

горизонтальной поверхности, приложена сила \mathbf{F} , направленная вдоль этой поверхности (рис. 1.2).

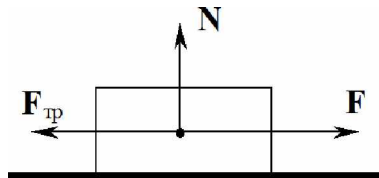


Рис. 1.2

Если брусок остается неподвижным, то согласно первому закону динамики приложенная сила \mathbf{F} компенсируется равной по величине противоположно направленной силой $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ — **силой трения покоя**. При увеличении внешней силы \mathbf{F} увеличивается и сила трения покоя. При этом сила трения покоя всегда равна по модулю приложенной силе и направлена в противоположную от нее сторону. Сила трения покоя изменяется от нуля до некоторого максимального значения F_0 . Если внешняя сила \mathbf{F} меньше F_0 , брусок сохраняет состояние покоя.

Если внешняя сила \mathbf{F} становится больше F_0 , брусок начинает скользить вдоль поверхности. В этом случае на него действует **сила трения скольжения**. Экспериментально установлено, что величина силы трения скольжения пропорциональна величине силы нормальной реакции опоры N :

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (1.3)$$

где μ — коэффициент трения, зависящий от шероховатостей трущихся поверхностей и их физических свойств.

В зависимости от величины μ все материалы делят на две группы:

— фрикционные материалы, для которых $\mu \geq 0,3$;

— антифрикционные материалы, для которых при сухом трении $\mu = 0,12 - 0,15$.

Выражение (1.3) известно в физике как **закон Амонтона**.

Сила трения скольжения всегда направлена в сторону, противоположную вектору скорости движения тела вдоль поверхности соприкосновения.

Сила трения качения возникает в том случае, когда одно тело катится по поверхности другого тела. Например, круглый цилиндр или шар катится по плоской или изогнутой поверхности. Трение качения формально подчиняется закону Амонтона, но коэффициент трения много меньше, чем при трении скольжения.

3. Сила тяжести F_T — это сила притяжения тел к Земле, направленная к центру Земли. Является частным случаем закона всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения состоит в том, что две материальные точки или два шара массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу силой, прямо пропорциональной произведению масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r_{12} между ними:

$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}, \quad G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}, \quad (1.4)$$

где G — гравитационная постоянная.

Представим, что Земля имеет форму шара радиуса R и массой M . Если тело массой m находится вблизи поверхности Земли, то в соответствии с законом всемирного тяготения (1.4) оно будет притягиваться Землей со следующей силой:

$$F_T = gm, \quad g = G \frac{M}{R^2}. \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, направленный к Земле перпендикулярно ее поверхности. Величина ускорения свободного падения слабо зависит от географической широты (суточное вращение Земли создает центростремительное ускорение, разное на разных широтах) и в среднем равна $9,81 \text{ м/с}^2$.

4. **Вес тела P** — сила, с которой тело вследствие его притяжения Землей давит на горизонтальную опору или растягивает вертикальный подвес. Если тело покоится или движется равномерно и прямолинейно, то его вес численно равен силе тяжести. При этом сила тяжести приложена к телу, а вес — к опоре или подвесу.

Пусть тело вместе с опорой движется с ускорением \mathbf{a} . Координатную ось y направим в сторону Земли (рис. 1.3).

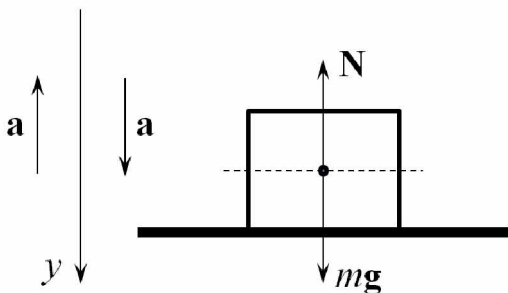


Рис. 1.3

На тело действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила реакции опоры \mathbf{N} . Тогда уравнение движения тела в проекции на ось y имеет такой вид:

$$ma_y = mg + N_y.$$

По третьему закону динамики вес тела численно равен реакции опоры и направлен в противоположную сторону, т. е.

$P = -N_y$. Из уравнения движения следует, что

$$P = m(g - a_y). \quad (1.6)$$

Таким образом, при движении тела с ускорением, направленным в сторону Земли ($a_y > 0$), его вес меньше силы тяжести. В частности, при $a_y = g$ тело находится в *состоянии невесомости*. При движении тела с ускорением, направленным против силы тяжести ($a_y < 0$), его вес становится больше силы тяжести (возникает *перегрузка*).

1.2. Механическое равновесие

В соответствии с первым законом динамики тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения относительно инерциальной системы отсчета, если равнодействующая всех приложенных к этому телу сил равна нулю. В противном случае тело приобретает ускорение, прямо пропорциональное результирующей действующих сил и обратно пропорциональное инертной массе тела (второй закон динамики), и тогда говорят, что сила оказывает на тело динамическое воздействие. Если же тело остается неподвижным при действии силы, то говорят, что она (сила) оказывает на тело статическое воздействие, а само тело находится в равновесии.

Статическое действие силы проиллюстрировано на рис. 1.4. Действующая сила \mathbf{F} , перпендикулярная вертикальной стенке, компенсируется реакцией этой стенки \mathbf{N} , т. е. тело остается неподвижным, находится в состоянии равновесия.

Обобщая вышеизложенное, определим понятие равновесия применительно к классической механике следующим образом.

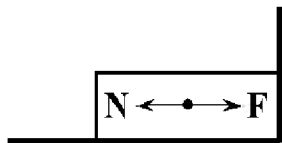


Рис. 1.4

Механическая система, на которую действуют силы, находится в состоянии равновесия, если все ее точки покоятся по отношению к рассматриваемой системе отсчета.

Если система отсчета является инерциальной, равновесие называется *абсолютным*, а если неинерциальной, то *относительным*. Изучение условий равновесия тел имеет большое практическое значение, в частности в строительном деле.

Задача определения условий равновесия реальных тел осложняется тем, что под действием приложенных сил тела деформируются, т. е. изменяют свои размеры (объем и форму). Степень деформации зависит от материала тела, его формы, а также от величин, направлений и точек приложения сил.

Во многих случаях, имеющих место на практике, деформациями можно пренебречь, т. е. можно использовать упрощенную модель недеформируемого, *абсолютно твердого* тела. Статика изучает условия равновесия абсолютно твердых тел.

В случае простейшей механической системы, которая представляет собой материальную точку, необходимым и достаточным условием равновесия является равенство нулю результирующей всех приложенных сил. В статике учитываются реальные размеры и форма тел. Это требует выполнения дополнительных условий равновесия.

1.3. Момент силы относительно оси вращения

Пусть тело может вращаться вокруг неподвижной оси, пронизывающей это тело. Рассмотрим случай, когда к некоторой точке A тела приложена сила \mathbf{F} , лежащая в плоскости, перпендикулярной оси вращения (рис. 1.5). Неподвижная ось вращения проходит через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

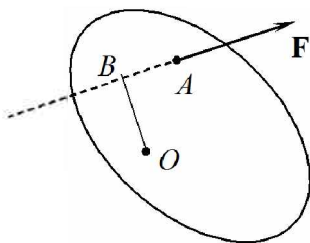


Рис. 1.5

Очевидно, движение тела, вызванное приложенной силой, зависит не только от величины и направления последней, но и от точки ее приложения. Эта зависимость определяется кроме самой силы так называемым *плечом силы* d — кратчайшим расстоянием от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила (отрезок AB на рис. 1.5).

Важной характеристикой вращательного движения тела относительно некоторой неподвижной оси является векторная физическая величина \mathbf{M} , называемая *моментом силы*. Вектор \mathbf{M} направлен вдоль оси вращения и ориентирован по *правилу правого винта*. Пусть радиус-вектор \mathbf{r} направлен от оси вращения по перпендикуляру к ней в точку A приложения силы. Если сила лежит в плоскости, перпендикулярной оси

вращения, то правило правого винта можно сформулировать следующим образом: если головку правого винта поворачивать по кратчайшему пути от радиус-вектора \mathbf{r} до вектора силы \mathbf{F} , то направление поступательного движения острия винта покажет направление вектора момента силы \mathbf{M} . Модуль момента силы равен произведению модуля силы на ее плечо, т. е. $M = F \cdot d$.

При решении задач обычно используют следующее определение момента силы относительно оси вращения O :

$$M = \pm F \cdot d. \quad (1.7)$$

Момент силы, пытающийся повернуть тело вокруг оси против часовой стрелки, принято считать положительным, а пытающийся повернуть по часовой стрелке — отрицательным. В первом случае в формуле (1.7) выбирают знак плюс, а во втором — минус.

Единицей измерения момента силы в СИ является *ньютон-метр* ($\text{Н} \cdot \text{м}$). Для обозначения размерности физических величин будем использовать квадратные скобки. Тогда из формулы (1.7) следует

$$[M] = [F] \cdot [d] = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Заметим, что единицы момента силы формально образуются так же, как единицы работы, но единица измерения «джоуль» по отношению к моменту силы не применяется.

Рассмотрим общий случай, когда приложенная сила не перпендикулярна оси вращения (рис. 1.6).

Разложим вектор силы \mathbf{F} на две составляющие: тангенциальную \mathbf{F}_t , которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения, и нормальную \mathbf{F}_n , направленную вдоль оси вращения. Вращательный момент создает только тангенциальная

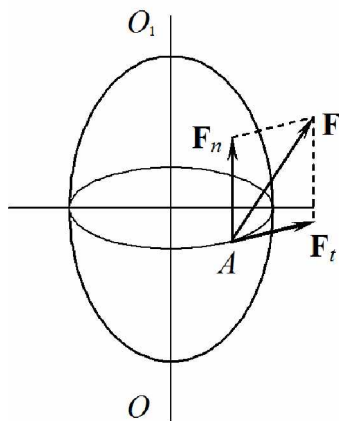


Рис. 1.6

составляющая \mathbf{F}_t , в то время как нормальная составляющая \mathbf{F}_n способна вызвать лишь смещение тела вдоль оси вращения.

1.4. Центр масс

Мысленно разделим движущееся тело на отдельные малые части. Тогда на каждую такую часть действуют как внутренние, так и внешние силы. Внутренние силы — это силы, действующие на рассматриваемую часть тела со стороны остальных его частей за счет межмолекулярных связей. Внешние силы обусловлены взаимодействием некоторой части движущегося тела с другими телами. Например, на каждую часть тела, брошенного под углом к горизонту, действует внешняя сила тяжести. Очевидно, характер механического движения отдельных частей тела зависит от приложенных к ним внутренних и внешних сил. Тогда движение тела как целого можно описать, используя методы дифференциального и интегрального исчисления.

Простые наблюдения показывают, что в любом движущемся теле всегда можно выделить такую малую часть (в пределе — точку), которая движется только поступательно, без обращения вокруг оси, проходящей через тело. Так двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе всего тела, если бы на эту точку действовали те же внешние силы, которые действуют на все тело. Положение этой точки зависит от распределения массы по объему тела. Ее называют **центром масс тела**.

Рассмотрим, как определить центр масс тела в простейшем случае, для механической системы, состоящей из двух материальных точек массами m_1 и m_2 (рис. 1.7).

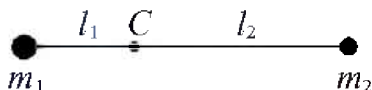


Рис. 1.7

Точка C , которая является центром масс рассматриваемой системы, лежит на прямой, соединяющей материальные точки. Причем центр масс расположен ближе к материальной точке, имеющей большую массу, в соответствии с условием

$$m_1 l_1 = m_2 l_2. \quad (1.8)$$

Пусть \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 — векторы, проведенные от материальных точек к центру масс C , а \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_c — радиус-векторы точек и центра масс соответственно (рис. 1.8). Систему координат выберем так, чтобы материальные точки находились в плоскости XOY .

Из рис. 1.8 видно, что выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{l}_1 = \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{r}_2 + \mathbf{l}_2 = \mathbf{r}_c. \quad (1.9)$$

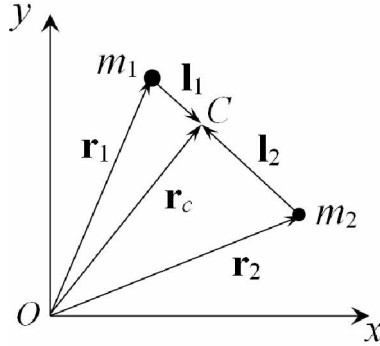


Рис. 1.8

Умножив первое уравнение на m_1 , а второе на m_2 и сложив их, получим

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_1 \mathbf{l}_1 + m_2 \mathbf{l}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{r}_c. \quad (1.10)$$

Векторы \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 направлены в противоположные стороны. С учетом (1.8) имеем

$$m_1 \mathbf{l}_1 = -m_2 \mathbf{l}_2.$$

Тогда из (1.10) следует:

$$\mathbf{r}_c = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (1.11)$$

Полученное выражение можно обобщить на механические системы, состоящие из произвольного числа материальных точек. Если всего точек n и если их пронумеровать $i = 1, 2, \dots, n$, то для радиус-вектора центра масс можно записать

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (1.12)$$

где m — полная масса системы.

В общем случае материальные точки располагаются не на плоскости, они занимают некоторый объем трехмерного пространства. Тогда радиус-вектор центра масс системы имеет три проекции на координатные оси, которые в соответствии с (1.12) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \\y_c &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, \\z_c &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Мысленно разделим твердое тело на n малых элементов и пронумеруем их: $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть Δm_i — масса i -го элемента.

Если число элементов n достаточно велико, то они малы, и твердое тело можно представить как совокупность материальных точек массами $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$.

Если положение каждой из них определяется радиус-векторами $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$, то по аналогии с (1.12) координаты центра масс твердого тела определятся выражением

$$\mathbf{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \Delta m_i \mathbf{r}_i, \quad m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i.\tag{1.14}$$

Центр масс однородных тел совпадает с центром симметрии этих тел, если таковой имеется. Так, центр масс однородного шара совпадает с его центром, центр масс однородного цилиндра находится на середине его продольной оси, центр масс однородного параллелепипеда — в точке пересечения диагоналей и т. д. (рис. 1.9).

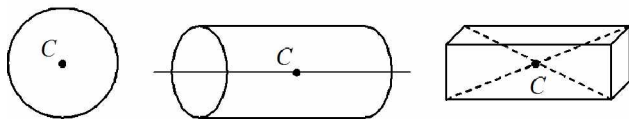


Рис. 1.9

Очевидно, центр масс твердого тела может находиться и вне самого тела, например у однородной сферы или кольца.

1.5. Условия равновесия твердого тела

Как известно из динамики, равновесие простейшей механической системы — материальной точки гарантируется равенством нулю результирующей всех приложенных к ней сил¹. Если таких сил n , то **первое условие равновесия** записывается в виде:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = 0. \quad (1.15)$$

Движение тела определенной формы и реальных размеров зависит не только от величин и направлений действующих сил, как это имеет место в случае материальной точки, но и от точек приложения этих сил. Поэтому условие (1.15) определяет равновесие только центра масс тела. При этом другие точки тела могут двигаться относительно некоторой оси, проходящей через центр масс, т. е. тело может вращаться вокруг этой оси. В связи с этим очевидно **второе условие равновесия**: алгебра-

¹ Напомним, что результирующей называют гипотетическую силу, которая оказывала бы на тело такое же действие, как все приложенные силы вместе взятые. Определяется результирующая векторной суммой реально действующих сил.

ическая сумма моментов всех приложенных сил относительно любой оси должна быть равна нулю.

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0. \quad (1.16)$$

Термин «алгебраическая сумма» означает, что все моменты в выражении (1.16) записываются со своими знаками: моменты сил, действующих на тело против часовой стрелки, положительны, а действующих по часовой стрелке — отрицательны.

Выполнение условий (1.15) и (1.16) необходимо и достаточно для равновесия абсолютно твердого тела.

1.6. Центр тяжести

Если материальная точка находится в гравитационном поле Земли, то сама эта точка и является центром тяжести. В случае твердого тела реальных размеров особенность силы тяжести состоит в том, что она не приложена к одной какой-то точке, а действует по всему объему тела. Мысленно разделим твердое тело на малые элементы. На каждый такой элемент действует сила тяжести, пропорциональная массе этого элемента и направленная к центру Земли. Если размеры тела малы по сравнению с размером Земли, то силы тяжести, действующие на разные элементы тела, приближенно можно считать параллельными.

Точка, через которую проходит равнодействующая всех параллельных сил тяжести, действующих на отдельные элементы тела, называется **центром тяжести**.

Нахождение центров тяжести тел является важной инженерной задачей, особенно в машиностроении и строительстве.

От положения центра тяжести зависит устойчивость строительных сооружений: зданий, мостов, вышек и т. п.

В простейшем случае положение центра тяжести можно определить опытным путем. Возьмем для этого плоское тело, например в форме пятиугольника (рис. 1.10).

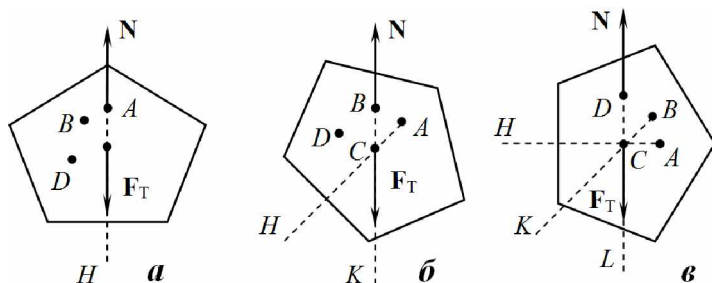


Рис. 1.10

Просверлим в нем отверстия в точках A , B и D . Вначале подвесим тело за отверстие A на неподвижный, закрепленный в горизонтальном положении стержень (см. рис. 1.10, a). Поскольку тело находится в равновесии, результирующая силы тяжести и реакции стержня должна быть равна нулю. Отсюда следует, что сила тяжести направлена противоположно реакции опоры вдоль прямой AH :

$$\mathbf{F}_T + \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{F}_T = -\mathbf{N}. \quad (1.17)$$

Теперь подвесим тело на тот же стержень за отверстие B (см. рис. 1.10, $б$). Сила тяжести будет вновь направлена противоположно реакции опоры, но уже в направлении прямой BK . И, наконец, подвесив тело за отверстие D (см. рис. 1.10, $в$), убедимся, что сила тяжести будет направлена вдоль прямой DL . Очевидно, точкой приложения силы тяжести, т. е. центром

тяжести тела, будет точка C , в которой пересекаются прямые AH , BK и DL . Положение центра тяжести не зависит от ориентации тела в пространстве.

Положение центра тяжести можно определить иначе, используя тот факт, что тело, закрепленное на оси, проходящей через центр тяжести, должно находиться в равновесии.

В качестве примера определим положение центра тяжести механической системы, которая представляет собой два шара массами m_1 и m_2 , соединенные невесомым стержнем (рис. 1.11).

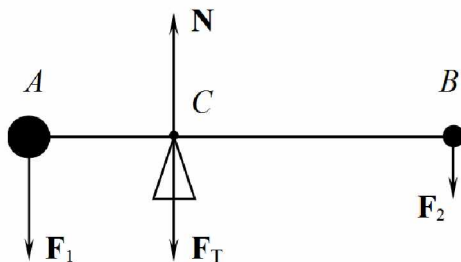


Рис. 1.11

Если точка опоры C совпадает с центром тяжести, то система находится в равновесии. Сила тяжести $\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ компенсируется реакцией опоры \mathbf{N} , т. е. первое условие равновесия (1.15) выполняется автоматически. В соответствии со вторым условием равновесия (1.16) алгебраическая сумма моментов сил тяжести \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 должна быть равна нулю:

$$F_1 \cdot AC - F_2 \cdot CB = 0, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{CB}{AC}. \quad (1.18)$$

Таким образом, центр тяжести C разделяет стержень на две части, отношение длин которых обратно пропорционально массам шаров.

Из данного примера следует, что центр тяжести совпадает с центром масс системы. Такое совпадение будет иметь место для любых тел при условии, что силы тяжести, действующие на все точки тела, можно считать параллельными. Это условие выполняется в том случае, когда размеры тела малы по сравнению с расстоянием до центра земного шара. Соответственно координаты центра тяжести могут быть рассчитаны по формулам (1.13) и (1.14).

Несмотря на формальное совпадение координат центра тяжести и центра масс, это разные характеристики твердого тела.

Центр тяжести существует у тела лишь в том случае, когда на него действует сила тяжести.

Центр масс существует у любого тела, даже если на него не действует сила тяжести.

Положение центра тяжести легко определяется для тела, составленного из простых симметричных частей. Сначала необходимо определить центры тяжести этих частей. Затем надо заменить тело системой материальных точек, каждая из которых помещается в центре тяжести соответствующей части тела и имеет массу этой части. После этого по формулам (1.13) определяются координаты центра масс системы материальных точек.

В качестве примера обсудим, как можно определить центр тяжести тела, показанного на рис. 1.12.

Мысленно разделим тело на четыре простые симметричные части (границы показаны пунктирными линиями). Если эти части однородны, то их центры тяжести совпадают с центрами симметрии (точки 1, 2, 3 и 4). Далее рассмотрим систему материальных точек 1, 2, 3 и 4 (масса каждой из них равна массе соответствующей части тела). Затем нужно выбрать удобную систему координат и записать координаты каждой

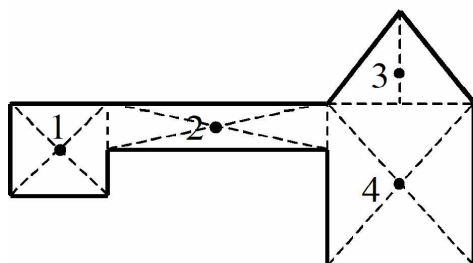


Рис. 1.12

материальной точки (заметим, что положение центра тяжести не зависит от выбора той или иной системы координат). После этого по формулам (1.13) можно вычислить координаты центра масс тела.

1.7. Устойчивость равновесия

В элементарной физике понятие устойчивости обычно объясняют на примере шарика, находящегося на различных поверхностях (рис. 1.13).

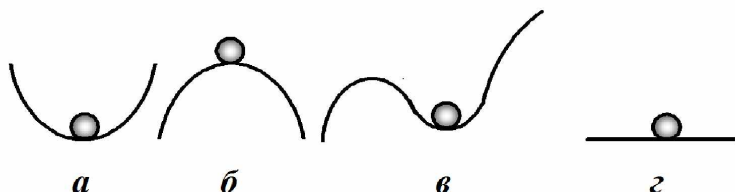


Рис. 1.13

Пусть шарик покоится на дне вогнутой полости (см. рис. 1.13, а). Если шарик немного сместить, а затем отпустить, то он обязательно возвратится в положение равновесия. Это происходит потому, что сила тяжести и реакция стенки не уравновешиваются, а равнодействующая этих сил всегда

направлена противоположно смещению. В таком случае положение шарика абсолютно устойчиво.

Теперь пусть шарик находится в положении равновесия на выпуклой поверхности. Сколь угодно малое отклонение приводит к возникновению результирующей силы, перемещающей шарик еще дальше от положения равновесия. Такое равновесие называют абсолютно неустойчивым (см. рис. 1.13, б).

В третьем случае состояние шарика устойчиво при малых отклонениях от равновесия и неустойчиво при больших отклонениях. Такое состояние называют асимптотически устойчивым (см. рис. 1.13, в).

Если смещать шарик на гладкой горизонтальной поверхности, то он останется в равновесии. Такое равновесие, сохраняющееся при всех смещениях, называют безразличным (см. рис. 1.13, г).

В положении устойчивого равновесия центр тяжести шарика занимает низшее из всех возможных положений (см. рис. 1.13, а). Следовательно, потенциальная энергия тела в положении устойчивого равновесия минимальна. Наоборот, при неустойчивом равновесии (см. рис. 1.13, б) тело занимает высшее из всех возможных положений, т. е. его потенциальная энергия максимальна. Таким образом, устойчиво такое положение тела, при котором его потенциальная энергия минимальна.

Для иллюстрации рассмотрим условие равновесия колонны (рис. 1.14).

При наклоне колонны ее центр тяжести (точка C) поднимается (см. рис. 1.14, а). Так продолжается до тех пор, пока вертикальная линия, проведенная через центр тяжести, проходит через площадь опоры колонны. Когда центр тяжести расположен точно над границей площади опоры, колонна продолжает

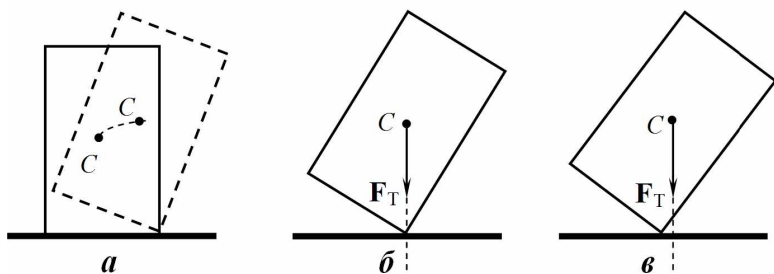


Рис. 1.14

сохранять положение равновесия, но это уже неустойчивое равновесие (см. рис. 1.14, б). При этом центр тяжести колонны находится на максимальной высоте. Наконец, если вертикаль, проведенная через центр тяжести, не пересекает площадь опоры, колонна теряет равновесие (см. рис. 1.14, в). Отсюда следует, что чем больше площадь опоры тела, тем его положение устойчивей.

Рассмотрим еще один пример исследования на устойчивость. Две трубки радиусами R и r расположены горизонтально так, что их оси взаимно перпендикулярны (рис. 1.15).

Определим, при каком соотношении между радиусами равновесие устойчиво и на какой максимальный угол можно при этом отклонить от горизонтали верхний цилиндр. Коэффициент трения между поверхностями цилиндров равен μ .

Поскольку верхний цилиндр уравновешен в горизонтальном положении, центры тяжести цилиндров O_1 и O_2 лежат на одной вертикали. Особенность рассматриваемой системы состоит в том, что при отклонении верхнего цилиндра от положения равновесия ось вращения смещается: проходит через точку A при равновесии цилиндров и через точку C — при отклонении (см. рис. 1.15).

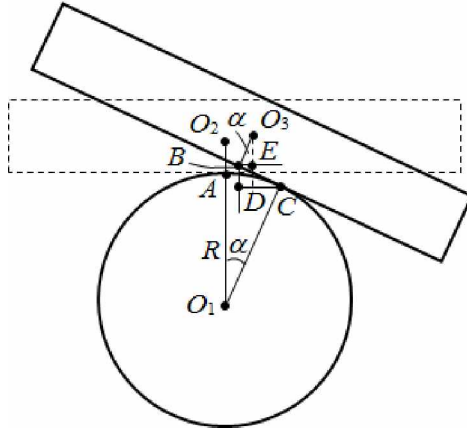


Рис. 1.15

Пусть верхний цилиндр отклонен от горизонтали на угол α . Благодаря силам трения верхний цилиндр движется вдоль поверхности нижнего цилиндра без проскальзывания. При этом точка опоры верхнего цилиндра A займет положение B , а длина дуги AC будет равна длине отрезка BC : $AC = BC = R\alpha$. Центр тяжести верхнего цилиндра O_2 переходит в новое положение O_3 . Если вертикаль, проведенная через точку O_3 , проходит левее точки опоры C , то сила тяжести будет стремиться вернуть верхний цилиндр в положение равновесия. Это реализуется при условии, что $BE \leq DC$. Так как $BE = r \sin \alpha$, а $DC = BC \cos \alpha = R\alpha \cos \alpha$, это условие запишется в виде

$$\frac{r}{R} \leq \frac{\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}. \quad (1.19)$$

При $0 < \alpha < \pi/2$ имеем $\operatorname{tg} \alpha > \alpha$. Тогда из выражения (1.19) следует, что равновесие верхнего цилиндра будет устойчивым, если его радиус меньше радиуса внешнего цилиндра ($r < R$).

В случае $r < R$ максимально допустимый угол отклонения α_m определяется условием соскальзывания. При $\alpha \geq \alpha_m$ сила трения не в состоянии сдержать верхний цилиндр, и он начинает соскальзывать с нижнего цилиндра. Вычисление предельного угла α_m проводится по аналогии с решением задачи об условии равновесия тела на наклонной плоскости. Это решение имеет вид $\operatorname{tg} \alpha_m = \mu$, т. е. большему коэффициенту трения μ соответствует больший предельный угол отклонения верхнего цилиндра.

Контрольные вопросы

1. Что представляют собой трение покоя и трение скольжения?
2. Что такое сила тяжести?
3. В каком случае вес тела численно равен силе тяжести?
4. Что такое невесомость и перегрузка?
5. В каком случае состояние механической системы называют равновесным?
6. В чем состоит модель абсолютно твердого тела?
7. Что такое плечо силы? Как определяется момент силы?
8. Какая составляющая действующей силы может вызвать вращение тела относительно некоторой оси?
9. Что такое центр масс тела? Чем определяется положение центра масс?
10. Каковы условия равновесия абсолютно твердого тела? В чем смысл этих условий?
11. Что такое центр тяжести тела?
12. В чем отличие между центром масс и центром тяжести тела?

13. В каком случае равновесие тела будет: (а) устойчивым, (б) неустойчивым, (в) условно устойчивым, (г) безразличным?
14. Как соотносятся между собой устойчивость равновесия тела и его потенциальная энергия?

Примеры решения задач

Задача 1.1

Определите центр тяжести четырех шаров массами 1 кг, 2 кг, 3 кг, 4 кг, закрепленных на невесомом стержне. Расстояние между центрами шаров равно l .

Решение

Поскольку центры тяжести каждого шара располагаются на одной прямой, центр тяжести всей системы находится на этой же прямой. Координатную ось Ox направим вдоль стержня, а ее начало совместим с первым шаром (рис. 1.16).

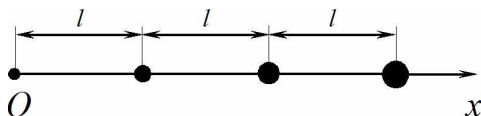


Рис. 1.16

Координаты центров шаров:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = l, \quad x_3 = 2l, \quad x_4 = 3l.$$

Используя первую формулу (1.13), имеем

$$x_c = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3 + x_4 m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \quad (1.20)$$

Подставляя заданные значения масс и координат, получим

$$x_c = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2l \cdot 3 + 3l \cdot 4}{1 + 2 + 3 + 4} = 2l.$$

Задача 1.2

Четыре шара массами m , $2m$, $3m$, $4m$ расположены в вершинах проволочного квадрата, сторона которого равна 1 м. Найдите положение центра тяжести C системы; массами проволок можно пренебречь.

Решение

Начало системы координат совместим с первым шаром, а координатные оси направим вдоль сторон квадрата (рис. 1.17).

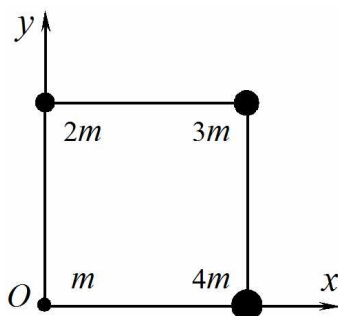


Рис. 1.17

Координаты центров шаров:

$$x_1 = 0 \text{ м}, \quad x_2 = 0 \text{ м}, \quad x_3 = 1 \text{ м}, \quad x_4 = 1 \text{ м},$$

$$y_1 = 0 \text{ м}, \quad y_2 = 1 \text{ м}, \quad y_3 = 1 \text{ м}, \quad y_4 = 0 \text{ м}.$$

Используя формулы (1.13), получим координаты центра тяжести системы:

$$x_c = 0,7 \text{ м}, \quad y_c = 0,5 \text{ м}.$$

Задача 1.3

Из однородной круглой пластинки радиусом R вырезан круг вдвое меньшего радиуса $r = R/2$ так, как это показано на рис. 1.18. Найдите положение центра тяжести C полученной пластинки.

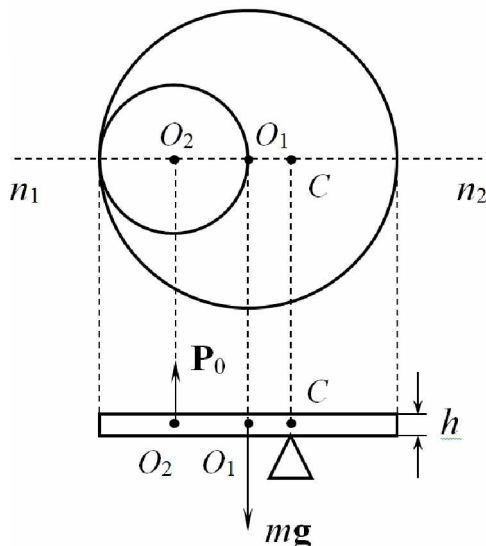


Рис. 1.18

Решение

Очевидно, что центр тяжести фигуры находится на оси n_1n_2 в некоторой точке C . Действующие на пластинку силы удобно показать на ее боковой проекции. Если бы не было отверстия, то центр тяжести пластинки совпал бы с центром симметрии O_1 . При этом сила тяжести была бы равна mg , где m — масса цельной пластинки. Вырезать из пластинки ее часть — все равно что приложить к точке O_2 , центру отверстия, силу, направленную вверх и численно равную силе тяжести вырезанной

части, $\mathbf{P}_0 = m_0 \mathbf{g}$. Через m_0 обозначена масса вырезанной части пластинки.

Если фигуру подпереть в точке центра тяжести C , то она будет находиться в равновесии. Первое условие равновесия (1.15) выполняется автоматически: реакция опоры уравнивает результирующую сил тяжести. Из второго условия равновесия (1.16) следует, что

$$mgx = m_0 g \left(\frac{R}{2} + x \right), \quad (1.21)$$

где $x = OC$ — смещение центра тяжести.

Пусть ρ — плотность материала пластинки, h — толщина диска. Тогда массы цельной пластинки и вырезанной части определяются следующими выражениями:

$$m = \rho \pi R^2 h, \quad m_1 = \rho \pi \frac{R^2}{4} h. \quad (1.22)$$

Из уравнений (1.21) и (1.22) получим

$$x = \frac{1}{4} \left(\frac{R}{2} + x \right), \quad x = \frac{R}{6}.$$

Задача 1.4

К концам стержня массой $m = 10$ кг и длиной $l = 0,4$ м подвешены грузы массами $m_1 = 40$ кг и $m_2 = 10$ кг (рис. 1.19). На каком расстоянии от груза m_1 надо подпереть стержень, чтобы он находился в равновесии?

Решение

На два груза и стержень действуют силы тяжести, которые скомпенсированы реакцией опоры \mathbf{N} , т. е. первое условие равновесия (1.15) выполнено. Второе условие равновесия (1.16)

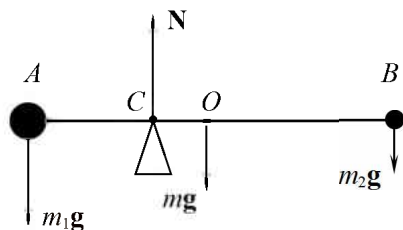


Рис. 1.19

относительно центра тяжести системы записывается в виде

$$m_1 g x - m g \left(\frac{l}{2} - x \right) - m_2 g (l - x) = 0, \quad (1.23)$$

где x — плечо силы тяжести первого груза; $(l/2 - x)$ — плечо силы тяжести стержня; $(l + x)$ — плечо силы тяжести второго груза.

Отсюда получаем

$$x = \frac{l(0,5m + m_2)}{m + m_1 + m_2}, \quad x = 0,1 \text{ м.} \quad (1.24)$$

Задача 1.5

Однородный стержень массой $m = 2$ кг одним концом шарнирно закреплен в точке A . К другому концу стержня подвешен груз массой $m_0 = 8$ кг. Стержень с грузом удерживается в равновесии горизонтальной нитью (рис. 1.20). Угол наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$. Определите величину и направление силы \mathbf{R} реакции шарнира. Трение в шарнире отсутствует. Нить подвеса невесомая.

Решение

Систему координат выберем так, чтобы ее начало совпадало с шарниром, ось x была направлена горизонтально, а ось y — вертикально (см. рис. 1.20).

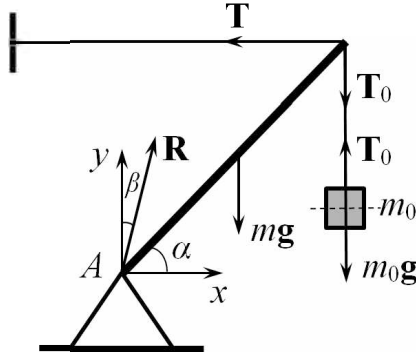


Рис. 1.20

Действующие на стержень силы: $m_0\mathbf{g}$ — вес груза; $m\mathbf{g}$ — сила тяжести балки; \mathbf{T} — сила натяжения горизонтальной нити; \mathbf{T}_0 — сила натяжения нити подвеса и \mathbf{R} — сила реакции шарнира, которая показана на рис. 1.20 условно, так как ее направление (угол β) неизвестно.

По первому условию равновесия (1.15) результирующая приложенных сил равна нулю:

$$\mathbf{R} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{T}_0 = 0. \quad (1.25)$$

В проекциях на оси координат уравнение (1.25) имеет вид

$$R_x - T = 0, \quad R_y - mg - T_0 = 0. \quad (1.26)$$

Поскольку нить, на которой подвешен груз, полагается невесомой, имеем $\mathbf{T}_0 = m_0\mathbf{g}$.

Второе условие равновесия (1.16) для моментов сил запишем относительно шарнира A. Если l — длина стержня, то с учетом знаков моментов имеем

$$Tl \sin \alpha - \frac{l}{2}mg \cos \alpha - m_0g \cos \alpha = 0. \quad (1.27)$$

Отсюда

$$T = g \left(\frac{m}{2} + m_0 \right) \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1.28)$$

Из уравнений (1.26) получим

$$R_x = T = g \left(\frac{m}{2} + m_0 \right) \operatorname{ctg} \alpha, \quad R_y = (m + m_0)g. \quad (1.29)$$

Модуль силы реакции шарнира определяется по теореме Пифагора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \quad (1.30)$$

Направление силы \mathbf{R} :

$$\cos \beta = \frac{R_y}{R}. \quad (1.31)$$

После численного расчета получим

$$R = 134 \text{ Н}, \quad \beta = 42^\circ.$$

Задача 1.6

Однородная балка длиной 2 м закреплена в стене, как показано на рис. 1.21, $A_1B = 0,5$ м. На конце балки подвешен груз массой $m = 100$ кг, масса балки $M = 50$ кг. Найдите силы, действующие на балку в точках A и B .

Решение

Балка действует на стену силами, направленными в точке A вверх, а в точке B — вниз. В соответствии с третьим законом динамики на балку со стороны стены действуют силы в противоположном направлении. Всего на балку действуют четыре силы: Mg — сила тяжести; $\mathbf{T}_1 = -\mathbf{T}$ — сила натяжения каната; \mathbf{F}_A и \mathbf{F}_B — силы реакции стены в точках A и B соответственно. Две последние силы необходимо определить.

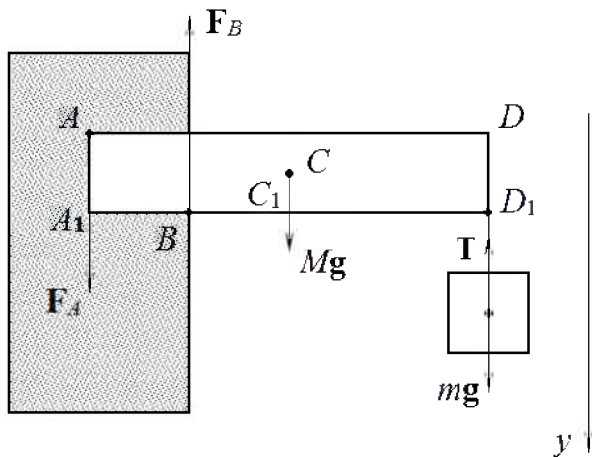


Рис. 1.21

Из условия равновесия груза следует, что величина силы натяжения каната равна силе тяжести груза:

$$T' = T = mg. \quad (1.32)$$

Тогда первое условие равновесия балки в проекции на ось y запишется в виде

$$Mg + mg + F_A - F_B = 0, \quad F_B = g(M + m) + F_A. \quad (1.33)$$

Второе условие равновесия балки для моментов сил относительно оси, проходящей через точку B перпендикулярно плоскости рисунка, таково:

$$-Mg \cdot BC_1 - mg \cdot BD_1 + F_A \cdot A_1B = 0. \quad (1.34)$$

Отсюда получаем

$$F_A = \frac{m \cdot BD_1 + M \cdot BC_1}{A_1B}. \quad (1.35)$$

Подставляя численные значения заданных величин в уравнения (1.35) и (1.33), получим

$$F_A = 3500 \text{ Н}, \quad F_B = 5000 \text{ Н}.$$

Задача 1.7

Лестница массой m_1 и длиной l приставлена к гладкой вертикальной стенке под углом α (рис. 1.22). На какую высоту h может подняться по лестнице рабочий массой m_2 , если коэффициент трения покоя между лестницей и полом равен μ ?

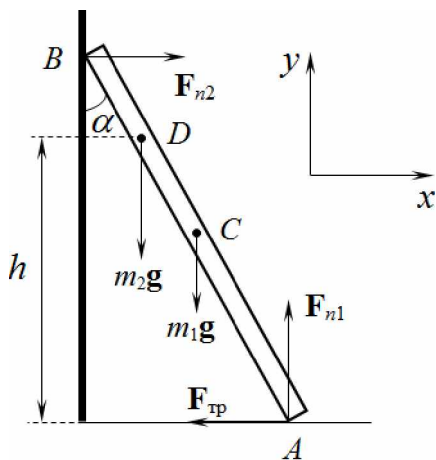


Рис. 1.22

Решение

К лестнице приложены следующие силы: m_1g — сила тяжести лестницы; m_2g — вес рабочего; F_{n1} — сила нормальной реакции вертикальной стенки; F_{n2} — сила нормальной реакции пола; $F_{\text{тр}}$ — сила трения между лестницей и полом.

По первому условию равновесия (1.15) векторная сумма приложенных сил равна нулю:

$$m_1 \mathbf{g} + m_2 \mathbf{g} + \mathbf{F}_{n1} + \mathbf{F}_{n2} + \mathbf{F}_{\text{тр}} = 0. \quad (1.36)$$

Запишем векторное уравнение (1.36) в проекциях на оси координат x и y :

$$F_{\text{тр}} = F_{n1}, \quad F_{n2} = g(m_1 + m_2). \quad (1.37)$$

Поскольку сила трения связана с нормальной реакцией опоры и коэффициентом трения $F_{\text{тр}} = \mu F_{n2}$, с учетом выражений (1.37) имеем

$$F_{\text{тр}} = F_{n1} = \mu g(m_1 + m_2). \quad (1.38)$$

Второе условие равновесия лестницы для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка, таково:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (1.39)$$

Здесь M_1 — момент силы тяжести лестницы, M_2 — момент веса рабочего, M_3 — момент силы нормальной реакции вертикальной стенки.

Из рис. 1.22 видно, что

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1 g \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha, & M_2 &= m_2 g \cdot h \operatorname{tg} \alpha, \\ M_3 &= F_{n1} \cdot l \cos \alpha = \mu g l(m_1 + m_2) \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Моменты сил трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и нормальной реакции пола \mathbf{F}_{n2} относительно точки A равны нулю, так как эти силы проходят через точку A .

Из уравнений (1.39) и (1.40) получим

$$h = l \frac{\mu(m_1 + m_2) \cos \alpha - 0,5 m_1 \sin \alpha}{m_2 \operatorname{tg} \alpha}. \quad (1.41)$$

Из выражения (1.41) следует, что чем больше угол α между лестницей и вертикальной стенкой, тем меньше высота h , на которую может подняться рабочий, чтобы при этом лестница сохраняла равновесие.

При $\alpha = 0$ имеем $h \rightarrow \infty$. Физически это означает, что лестница всегда находится в равновесии. Легко убедиться в том, что такое равновесие будет неустойчивым.

В другом предельном случае $\alpha = \pi/2$ (лестница лежит на полу) имеем $h = 0$. Это отражает тот очевидный факт, что подняться по лежащей на полу лестнице на какую-либо высоту невозможно. При этом лестница находится в устойчивом равновесии.

Задача 1.8

Однородная балка весом $P = 600 \text{ Н}$ и длиной $L = 4 \text{ м}$ опирается на гладкий пол и на выступ B , находящийся на высоте $h = 3 \text{ м}$ над полом (рис. 1.23). Балка образует угол $\alpha = 30^\circ$ с вертикалью и удерживается веревкой AC , натянутой у самого пола. Вычислите силу натяжения T веревки, силу реакции N и силу реакции N_1 выступа B .

Решение

На балку действуют следующие силы: \mathbf{P} — сила тяжести, равная по модулю весу балки и, так как балка однородная, приложенная к ее центру; \mathbf{N}_1 — реакция выступа B , направленная перпендикулярно балке; \mathbf{N} — реакция пола в точке опоры C ; \mathbf{T} — сила натяжения веревки. По условию задачи пол гладкий. Поэтому в точке C на балку действует только нормальная реакция опоры \mathbf{N} . В противном случае в точке C на балку действовала бы сила трения, направленная вдоль пола.

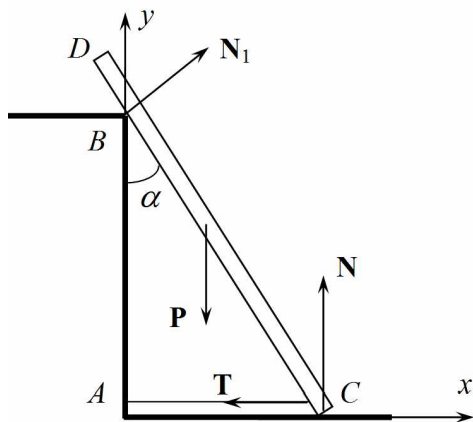


Рис. 1.23

Из первого условия равновесия (1.15) следует, что векторная сумма всех приложенных сил равна нулю:

$$\mathbf{P} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0. \quad (1.42)$$

Проекции этого уравнения на координатные оси x и y имеют вид

$$N_1 \cos \alpha - T = 0, \quad N_1 \sin \alpha - P + N = 0. \quad (1.43)$$

Уравнение моментов относительно оси, проходящей через точку C , таково:

$$P \frac{1}{2} L \sin \alpha - N_1 \cdot BC = 0. \quad (1.44)$$

Из уравнений (1.43), (1.44) после подстановки численных значений получим

$$N_1 = 173 \text{ Н}, \quad T = 150 \text{ Н}, \quad N = 513 \text{ Н}.$$

УПРУГИЕ И ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

2.1. Деформация

Под деформацией понимают изменение размеров тела, его объема и формы под действием приложенных сил или при изменении температуры. В переводе с латинского *deformatio* — искажение.

Деформацию могут испытывать твердые тела (кристаллические и аморфные), жидкости и газы. При деформации происходит смещение различных элементов материальной среды относительно друг друга.

В случае механического воздействия на твердые тела возможны деформации растяжения, сжатия, сдвига, изгиба и кручения. Различают упругие и пластические деформации.

Упругой называется деформация, которая исчезает после прекращения действия вызывающей ее силы, т. е. тело восстанавливает свой объем и форму.

Деформация твердого тела называется пластической, если она после снятия нагрузки не исчезает.

В деформированном теле возникают силы, препятствующие процессу деформации. Их называют силами упругости.

Электромагнитную природу силы упругости можно понять на основе молекулярных представлений о строении вещества. Составляющие молекулу атомы включают частицы, обладаю-

щие электрическим зарядом: отрицательно заряженные электроны и положительно заряженное ядро. Заряженные частицы являются причиной существования дальнедействующих сил притяжения и короткодействующих сил отталкивания между атомами и молекулами.

В материальной среде устанавливаются такие расстояния между молекулами, чтобы существовал баланс сил притяжения и отталкивания, при котором потенциальная энергия молекулярных взаимодействий минимальна.

В результате деформации расстояния между молекулами изменяются и, как следствие, нарушается баланс между силами притяжения и силами отталкивания. Так, при растяжении тела расстояния между молекулами увеличиваются, начинают превалировать силы притяжения, препятствующие этому процессу. «Избыточные» силы молекулярных притяжений и являются причиной возникновения силы упругости, которая противодействует растяжению тела. И наоборот, при деформации сжатия расстояния между молекулами деформируемого тела уменьшаются, превалирующими становятся молекулярные силы отталкивания. В теле возникает сила упругости, которая стремится растянуть тело и восстановить его начальные размеры.

Упругие деформации обладают рядом геометрических свойств. Мысленно выделим в деформируемом теле малый элемент объема. Можно показать, что при упругой деформации для этого элементарного объема справедливы приведенные ниже утверждения.

1. Точки элемента объема тела, находящиеся до деформации в одной плоскости, после упругой деформации также расположатся в одной плоскости. Это является следствием того, что поворот элемента объема, содержащего некото-

рую плоскость, как абсолютно твердого тела не может сместить точки тела из этой плоскости.

2. Точки, лежащие на одной прямой в элементе объема до деформации, после деформации также расположатся на некоторой прямой. Это следует из первого утверждения, так как прямая является геометрическим местом точек пересечения двух плоскостей. Таким образом, влияние упругой деформации на точки, расположенные на некотором отрезке прямой, проявляется, во-первых, в повороте прямой на некоторый малый угол, а во-вторых — в растяжении или сжатии этого отрезка.
3. Две параллельные до деформации плоскости в элементе объема останутся параллельными и после деформации.
4. Две параллельные прямые, проведенные в элементе объема до деформации, останутся параллельными и после деформации. Это следует из свойства сохранения параллельности двух плоскостей при упругой деформации.

Далее обсудим закон упругой деформации.

2.2. Закон Гука

Рассмотрим упругие деформации на примере растяжения (или сжатия) стержня. Один конец стержня закреплен на жесткой неподвижной стенке, а на другой действует растягивающая сила \mathbf{F} , направленная вдоль оси стержня (рис. 2.1).

Если S — площадь поперечного сечения стержня, то $p = F/S$ — величина растягивающей силы, действующей на единицу поверхности. Пусть l_0 — длина стержня до деформации, а l — после деформации. Тогда величина $\Delta l = l - l_0$ характеризует абсолютное удлинение стержня при деформации.

Заметим, что $\Delta l > 0$ при растяжении стержня и $\Delta l < 0$ при его сжатии. Безразмерная величина

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.1)$$

называется относительным удлинением.

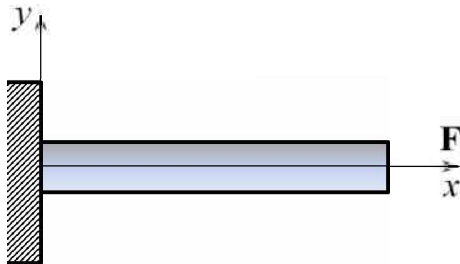


Рис. 2.1

В деформированном стержне возникает сила упругости $\mathbf{F}_{\text{упр}}$, препятствующая его растяжению и направленная противоположно внешней растягивающей силе \mathbf{F} . Очевидно, при равновесии стержня в соответствии с третьим законом динамики эти силы равны по величине:

$$\mathbf{F}_{\text{упр}} = -\mathbf{F}. \quad (2.2)$$

Отношение модуля силы упругости к площади поперечного сечения стержня, перпендикулярного направлению действия этой силы, называют нормальным механическим напряжением или просто напряжением.

$$\sigma = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = \frac{F}{S}. \quad (2.3)$$

Единицей напряжения в СИ является *паскаль* (Па).

$$[\sigma] = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} = 1 \text{ Па}.$$

Зависимость силы упругости от деформации установил английский физик Р. Гук. Из проведенных им экспериментов следует, что механическое напряжение, возникающее в теле при упругой деформации, пропорционально относительной деформации:

$$\sigma = E |\varepsilon|, \quad \frac{F}{S} = E \frac{|\Delta l|}{l_0}. \quad (2.4)$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем упругости* или *модулем Юнга*.

Модуль Юнга имеет размерность напряжения

$$[E] = 1 \text{ Па},$$

а его величина зависит от рода материала тела.

Выражение (2.4), устанавливающее линейную связь между напряжением и деформацией, называют **законом Гука**. Еще раз подчеркнем, что закон Гука справедлив только для упругих деформаций.

При одностороннем растяжении или сжатии изменяется не только длина стержня, изменяются и его поперечные размеры. Абсолютное большинство известных в природе материалов при растяжении уменьшают свои поперечные размеры, а при сжатии — увеличивают². Если стержень имеет круглое поперечное сечение, радиус которого до деформации равен r_0 , то после деформации растяжения радиус уменьшится на величину Δr : $r = r_0 - \Delta r$. Одновременно длина стержня увеличится: $l = l_0 + \Delta l$. Безразмерная величина μ , характеризующая отно-

²Исключение составляют так называемые ауксетики: некоторые полимеры, многослойная бумага из нанотрубок и, предположительно, — живые костные ткани.

шение поперечного сжатия к продольному растяжению, называется *коэффициентом Пуассона*:

$$\mu = \frac{\Delta r/r_0}{\Delta l/l_0}. \quad (2.5)$$

Значения коэффициента Пуассона, определяемые экспериментально и зависящие от рода материала, характеризуют изменение объема тела при деформации. Коэффициент Пуассона максимален, если объем деформируемого тела не изменяется.

Определим максимальное значение μ из задачи о продольном растяжении стержня.

Объем стержня до и после деформации составляет:

$$V_0 = \pi r_0^2 l_0, \quad V = \pi r^2 l.$$

Мы рассматриваем малые упругие деформации. Поэтому, пренебрегая членами второго порядка малости $(\Delta r)^2$ и $\Delta r \Delta l$, получим

$$V = \pi r_0^2 l_0 \left(1 + \frac{\Delta l}{l_0} - 2 \frac{\Delta r}{r_0} \right),$$

$$\Delta V = V - V_0 = V_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0} - 2 \frac{\Delta r}{r_0} \right).$$

Если объем стержня при его растяжении не изменяется ($\Delta V = 0$), то получим

$$\mu = \frac{\Delta r/r_0}{\Delta l/l_0} = \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Для обычных материалов коэффициент Пуассона близок к 0,30, т. е. объем тела при одностороннем растяжении увеличивается. Однако в природе существуют материалы, у которых коэффициент Пуассона близок к нулю (это, например, пробка).

2.3. Деформация сдвига

До сих пор мы обсуждали закон Гука применительно к деформации растяжения (сжатия). Теперь рассмотрим деформацию сдвига. Такая деформация возникает, например, в заклепках и болтах, скрепляющих металлические конструкции.

Рассмотрим деформацию бруска под действием силы, приложенной к грани BC вдоль ее плоскости при том, что противоположная грань AD жестко закреплена и остается неподвижной (рис. 2.2).

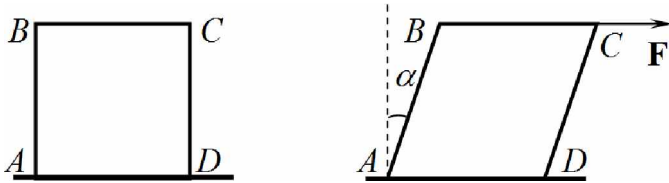


Рис. 2.2

Приложенная сила вызывает смещение плоских слоев бруска относительно друг друга в направлении действия силы.

Очевидно, что малая упругая деформация сдвига изменяет форму тела, но не изменяет его объем. Как и при растяжении стержня, внешняя сила уравнивается внутренней силой упругости, которая препятствует смещению слоев деформируемого тела.

Отношение силы упругости, возникающей при деформации сдвига, к площади грани, вдоль которой действует внешняя сила, называют касательным напряжением:

$$\tau = \frac{F_{\text{упр}}}{S} = \frac{F}{S}. \quad (2.7)$$

Применительно к малой упругой деформации сдвига закон Гука устанавливает линейную зависимость касательного напряжения τ от угла сдвига α (см. рис. 2.2):

$$\tau = G\alpha. \quad (2.8)$$

Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига*.

В СИ единицей измерения модуля сдвига является *паскаль на радиан* — Па/рад (обычно пишут паскаль — Па, а радиан опускают). Модуль сдвига связан с модулем Юнга и коэффициентом Пуассона следующим соотношением:

$$G = \frac{E}{2} (1 + \mu)^{-1}. \quad (2.9)$$

Приведем примерные значения модуля Юнга (E), модуля сдвига (G) и коэффициента Пуассона (μ) для некоторых материалов (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Материал	$E, 10^{11}$ Па	$G, 10^{10}$ Па	μ
Сталь	2,1	8,3	0,25
Алюминий	0,70	2,6	0,34
Стекло	0,56	2,2	0,25
Каучук	0,00008	0,000	0,47

2.4. Диаграмма растяжения

Важной характеристикой механических свойств твердых тел является зависимость напряжения от относительного удлинения стержня. Графическое изображение этой зависимости на-

зывают диаграммой растяжения. Качественный вид ее показан на рис. 2.3.

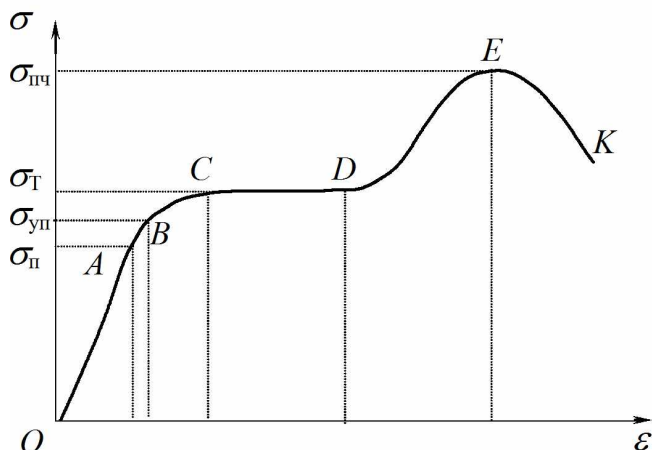


Рис. 2.3

Напряжение $\sigma_{\text{п}}$, при котором еще выполняется закон Гука, называют пределом пропорциональности.

Если нагрузку на образец несколько увеличить, то зависимость напряжения от удлинения становится нелинейной, и закон Гука нарушается. Тем не менее при небольшом относительном удлинении деформация остается упругой, т. е. после снятия нагрузки размеры стержня практически восстанавливаются (см. рис. 2.3, участок AB).

Максимальное напряжение $\sigma_{\text{уп}}$, при котором еще не возникают заметные остаточные деформации, называют пределом упругости (точка B на рис. 2.3).

За пределом упругости при некотором значении напряжения $\sigma_{\text{т}}$, соответствующем точке C на рис. 2.3, стержень удлиняется практически без увеличения нагрузки (участок CD). Это

явление называют текучестью материала, а напряжение σ_T — пределом текучести.

Материалы, у которых область текучести CD значительна, называют пластичными. Например, пластичными являются цветные металлы (алюминий, медь, золото).

Материалы, у которых область CD незначительна, называют хрупкими (стекло, бетон, чугун). Хрупкие материалы выдерживают лишь небольшие деформации.

При дальнейшем увеличении нагрузки деформация образца становится неоднородной — в некотором сечении стержня появляется сужение («шейка»). При этом напряжение увеличивается до максимального значения $\sigma_{пч}$ в точке E (см. рис. 2.3). После этого наступает разрушение образца. Напряжение $\sigma_{пч}$ называется пределом прочности.

Напряжение σ_d , которое материал должен выдерживать в процессе эксплуатации изделия без заметных пластических деформаций, называют допустимым напряжением.

Для минимизации возможности разрушения сооружений элементы конструкции должны быть рассчитаны так, чтобы допустимые напряжения были в несколько раз меньше предела прочности. Число n , показывающее, во сколько раз предел прочности больше допустимого напряжения, носит название *коэффициент запаса прочности*:

$$n = \frac{\sigma_{пч}}{\sigma_d}. \quad (2.10)$$

В зависимости от качества материала, характера нагрузки, степени важности сооружения и места его расположения коэффициент запаса прочности выбирают обычно в пределах от 2 до 10.

Величины предела прочности ряда материалов приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

Материал	$\sigma_{\text{пч}}, 10^8 \text{ Па}$
Графит (нитевидный кристалл)	240
Сапфир (нитевидный кристалл)	150
Железо (нитевидный кристалл)	130
Высокоуглеродистая сталь	42
Проволока из вольфрама	38
Стекловолокно	36
Мягкая сталь	6
Нейлон	5

2.5. Тепловое расширение тел

Из опыта известно, что при изменении температуры линейные размеры твердых тел, а также объем жидкостей тоже изменяются. При нагревании тела его линейные размеры и объем увеличиваются, а при понижении температуры — уменьшаются. Исключение составляет лишь вода, объем которой уменьшается при повышении температуры от 0 до 4 °С.

Тепловое линейное расширение

Явление линейного теплового расширения твердых тел играет важную роль в машиностроении, его следует учитывать при проектировании различных металлоконструкций (вышек для теле- и радиотрансляции, линий электропередачи, железнодорожных путей и т. д.), плотин, мостов, промышленных и жилых

зданий и т. д. Особое значение это имеет для регионов с резко континентальным климатом, когда температура воздуха изменяется от $+40^{\circ}\text{C}$ летом до -40°C зимой. Изменение линейных размеров тела может вызвать резкое возрастание действующих напряжений в строительных конструкциях. Если действующие напряжения достигнут предела прочности материала, это приведет к разрушению конструкции.

Пусть l_0 — линейный размер тела при температуре $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$, а l — соответствующий размер после изменения температуры на $\Delta t = t - t_0 = t$. Абсолютное изменение линейного размера тела $\Delta l = l - l_0$ зависит не только от величины изменения температуры, но и от начального размера l_0 . При этом относительное изменение размера тела, как установлено экспериментально, в широком интервале температур пропорционально величине изменения температуры:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta t. \quad (2.11)$$

Коэффициент пропорциональности α — это *коэффициент линейного теплового расширения*.

В СИ единицей измерения α является $1/\text{K}$. Коэффициент линейного теплового расширения определяется экспериментально, зависит только от рода материала и в широком интервале температур практически не зависит от температуры тела.

Выражение (2.11) обычно записывают в виде

$$l = l_0(1 + \alpha t). \quad (2.12)$$

Формула (2.12) неудобна для практического использования тем, что требует знания линейных размеров тела при температуре $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$. Получим приближенную формулу для расчета размеров тела при любой начальной температуре. Пусть t_1 —

начальная температура тела, а l_1 — соответствующий этой температуре линейный размер тела. Аналогично t_2 и l_2 — конечная температура и соответствующий ей размер этого тела. Согласно формуле (2.12) имеем

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1), \quad l_2 = l_0(1 + \alpha t_2).$$

Отсюда

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha t_2}{1 + \alpha t_1}.$$

Правую часть полученного выражения умножим и разделим на $1 - \alpha t_1$:

$$l_2 = l_1 \frac{1 + \alpha(t_2 - t_1) - \alpha^2 t_1 t_2}{1 - (\alpha t_1)^2}.$$

Коэффициент линейного теплового расширения мал (например, для стали $\alpha \approx 10^{-5} \text{ K}^{-1}$), поэтому в последнем выражении членами порядка α^2 можно пренебречь. При этом ошибка составит всего десятые доли процента. Тогда получим формулу, удобную для практических расчетов:

$$l_2 = l_1(1 + \alpha \Delta t), \quad \Delta t = t_2 - t_1. \quad (2.13)$$

Тепловое объемное расширение

Если линейное тепловое расширение могут испытывать только твердые тела, то объемному тепловому расширению подвержены также и жидкости. Экспериментально установлено, что при не слишком большом изменении температуры Δt объем некоторого тела или жидкости линейно зависит от Δt :

$$V = V_0(1 + \beta \Delta t). \quad (2.14)$$

Здесь V_0 — начальный объем, β — коэффициент объемного теплового расширения.

В СИ единицей измерения β является $1/\text{К}$. Коэффициент объемного теплового расширения, как и коэффициент линейного теплового расширения, зависит только от рода вещества и слабо зависит от температуры. При малом изменении температуры зависимость β от t можно пренебречь.

В табл. 2.3 приведены экспериментальные значения коэффициентов линейного (α) и объемного (β) теплового расширения для некоторых веществ.

Таблица 2.3

Твердое тело	$\alpha, 10^{-6} \text{ К}^{-1}$	Жидкость	$\beta, 10^{-4} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	22,9	Вода	2,1
Латунь	18,9	Глицерин	5,0
Медь	16,7	Керосин	10,0
Сталь (железо)	11,0	Ртуть	1,8
Стекло обычное	8,5	Спирт этиловый	11,0

Установим связь между коэффициентами объемного и линейного теплового расширения. Рассмотрим изотропное тело в форме куба, у которого длина ребра равна l_0 при температуре 0°С . Начальный объем куба — $V_0 = l_0^3$. При изменении температуры на величину Δt длина ребра изменится в соответствии с формулой (2.12). Изменится и объем куба:

$$V = l^3 = l_0^3(1 + \alpha\Delta t)^3.$$

Вновь учтем малость величины α . Пренебрегая членами порядка α^2 и α^3 , получим

$$V = V_0(1 + 3\alpha\Delta t).$$

Сравнение с формулой (2.14) устанавливает следующую связь между коэффициентами объемного и линейного теплового расширения:

$$\beta = 3\alpha. \quad (2.15)$$

Коэффициент объемного теплового расширения равен утроенному коэффициенту линейного теплового расширения. Этот вывод носит общий характер, несмотря на то, что для его доказательства мы рассматривали тело в форме куба при начальной температуре 0°C .

2.6. Зависимость плотности от температуры

Очевидно, что при изменении объема тела, имеющего фиксированную массу, изменится и плотность вещества этого тела. Действительно, пусть ρ_1 , V_1 и ρ_2 , V_2 — плотность и объем вещества одинаковой массы m при температурах t_1 и t_2 соответственно. Тогда имеем

$$\rho_1 = \frac{m}{V_1}, \quad \rho_2 = \frac{m}{V_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2}.$$

С учетом формулы (2.14) можно записать

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2}.$$

Умножив и поделив правую часть последнего выражения на $1 - \beta t_2$ и пренебрегая членами порядка β^2 , получим

$$\rho_2 = \rho_1[1 - \beta(t_2 - t_1)]. \quad (2.16)$$

Таким образом, при нагревании плотность вещества уменьшается, а при охлаждении — увеличивается. Исключение из этого правила составляет только вода в интервале температур от 0 до 4 °С.

Контрольные вопросы

1. Что такое деформация?
2. Какие деформации называют упругими и какие — пластическими?
3. Каков механизм возникновения силы упругости?
4. Каковы геометрические свойства упругих деформаций?
5. Что такое механическое напряжение? В каких единицах оно измеряется?
6. В чем состоит закон Гука для деформации растяжения или сжатия? Укажите пределы его применимости.
7. Что характеризует коэффициент Пуассона?
8. В чем состоит закон Гука для деформации сдвига?
9. Что такое предел пропорциональности, упругости, текучести, прочности?
10. Какие материалы называют пластичными, а какие — хрупкими?
11. Что такое коэффициент запаса прочности?
12. Что называют тепловым расширением тела?
13. От чего зависит коэффициент линейного теплового расширения?
14. Как связаны между собой коэффициенты объемного и линейного теплового расширения?
15. Как плотность тела зависит от его температуры?

Примеры решения задач

Задача 2.1

Какой диаметр должен иметь стальной трос подъемного крана, если максимальная масса поднимаемого груза равна 10 т? Предел прочности стальной проволоки $8,5 \cdot 10^8$ Па, запас прочности должен быть равен 6.

Решение

Если полагать, что кран поднимает груз равномерно, то максимальная растягивающая трос сила равна силе тяжести груза:

$$F = mg, \quad (2.17)$$

где m — масса груза; g — ускорение свободного падения.

Пусть S — площадь поперечного сечения троса. Тогда максимальное действующее напряжение с учетом выражения (2.17) равно

$$\sigma_d = \frac{F}{S} = \frac{mg}{\pi d^2/4}, \quad (2.18)$$

где d — диаметр троса.

Используя формулу (2.10) для коэффициента запаса прочности n , получим

$$n = \frac{\sigma_{пч}}{\sigma_d}, \quad d = \sqrt{\frac{4nmg}{\pi\sigma_{пч}}}. \quad (2.19)$$

Подставляя заданные в условии задачи численные значения величин, рассчитаем диаметр троса:

$$d = 3 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 3 \text{ см}.$$

Задача 2.2

Определите абсолютное удлинение стального троса длиной $l_0 = 10$ м и площадью поперечного сечения $S = 3 \text{ см}^2$ при

подвешивании на него груза массой $m = 6$ т. Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па.

Решение

По закону Гука (2.4) относительное удлинение троса таково:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{SE}. \quad (2.20)$$

Здесь $F = mg$ — сила тяжести, растягивающая трос.

Отсюда абсолютное удлинение троса составит:

$$\Delta l = \frac{mgl_0}{SE}, \quad \Delta l = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ м.} \quad (2.21)$$

Задача 2.3

На стальной стержень радиуса $R = 100,125$ см надето медное кольцо, имеющее радиус $r = 100$ см и площадь поперечного сечения $S = 4 \text{ мм}^2$. С какой силой F будет растянуто кольцо? Модуль упругости меди $E = 1,2 \cdot 10^{11}$ Па. Деформацией стержня следует пренебречь.

Решение

Для того чтобы кольцо радиуса r надеть на стержень радиуса $R > r$, его нужно растянуть на величину

$$\Delta l = 2\pi(R - r). \quad (2.22)$$

Тогда относительное удлинение кольца

$$\varepsilon = \frac{R - r}{r}.$$

По закону Гука имеем:

$$\frac{R - r}{r} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{SE}. \quad (2.23)$$

Отсюда сила растяжения кольца определится формулой

$$F = SE \frac{R - r}{r}. \quad (2.24)$$

Произведя численный расчет по формуле (2.24), получим

$$F = 600 \text{ Н}.$$

Задача 2.4

Башню какой наибольшей высоты можно выложить из кирпича, предел прочности на сжатие которого равен $6 \cdot 10^6$ Па, если запас прочности должен быть равен 10? Плотность кирпича 1800 кг/м^3 .

Решение

Воспользуемся формулой (2.10) и выразим действующее напряжение σ_d через предел прочности $\sigma_{пч}$ и коэффициент запаса прочности n :

$$\sigma_d = \frac{\sigma_{пч}}{n}. \quad (2.25)$$

Пусть башня высотой h имеет массу m и площадь поперечного сечения S . Максимальное действующее напряжение будет в основании башни. Оно определится отношением силы тяжести башни к площади ее поперечного сечения:

$$\sigma_d = \frac{mg}{S},$$

где $g \approx 10 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения.

Масса башни определится произведением ее объема на плотность кирпича:

$$m = \rho V = \rho Sh.$$

Тогда действующее напряжение

$$\sigma_d = \frac{mg}{S} = \rho gh.$$

Подставляя полученное выражение в левую часть формулы (2.25), для максимальной высоты башни получим

$$h = \frac{\sigma_{\text{пч}}}{n\rho g}, \quad h = 33,3 \text{ м.} \quad (2.26)$$

Если построить башню большей высоты, то это приведет к уменьшению коэффициента запаса прочности.

Задача 2.5

Между двумя столбами натянута проволока длиной $2l$. К проволоке точно посередине подвешен фонарь массой m (рис. 2.4). Площадь поперечного сечения проволоки равна S , модуль упругости — E . Определите угол провисания проволоки, считая его малым.

Решение

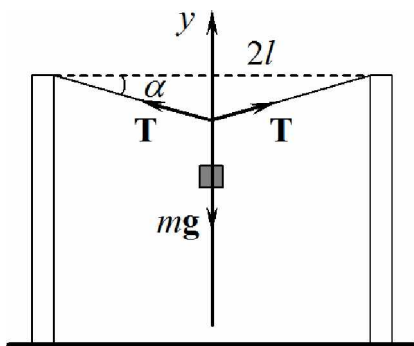


Рис. 2.4

На фонарь действуют сила тяжести $m\mathbf{g}$ и сила натяжения проволоки \mathbf{T} (см. рис. 2.4). В состоянии равновесия векторная сумма сил, действующих на фонарь, равна нулю:

$$\mathbf{T} + \mathbf{T} + m\mathbf{g} = 0. \quad (2.27)$$

В проекции на ось y уравнение (2.27) запишется в виде

$$2T \sin \alpha = mg.$$

Отсюда величина силы натяжения проволоки

$$T = \frac{mg}{2 \sin \alpha}. \quad (2.28)$$

Из рис. 2.4 видно, что длина половины проволоки после ее провисания такова:

$$l_1 = \frac{l}{\cos \alpha}.$$

Тогда относительное удлинение половины проволоки есть

$$\frac{l_1 - l}{l} = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}. \quad (2.29)$$

Механическое напряжение в проволоке определяется отношением величины силы натяжения T к площади поперечного сечения проволоки S . По закону Гука имеем:

$$\frac{l_1 - l}{l} = \frac{T}{SE}. \quad (2.30)$$

Отсюда с учетом выражений (2.28) и (2.29) получим:

$$\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{mg}{SE 2 \sin \alpha}. \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) содержит только одну неизвестную величину — угол провисания α . Решение этого уравнения существенно упростится, если воспользоваться условием малости угла, т. е. $\alpha \ll 1$ ³. В этом случае тригонометрические функции можно разложить в ряд, ограничившись членами порядка α^2 :

$$\sin \alpha \approx \alpha + \dots, \quad \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$$

³ Предполагается, что угол измеряется в радианах.

Тогда решение уравнения (2.31) будет иметь следующий вид:

$$\alpha^3 = \frac{mg}{SE}, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{mg}{SE}}. \quad (2.32)$$

Полученная формула может быть использована в инженерной практике в том случае, когда необходимо подобрать материал проволоки и площадь ее поперечного сечения для того, чтобы угол провисания не превышал некоторого заданного значения.

Задача 2.6

Между двумя неподвижными жесткими стенками вставлен без зазора стальной стержень, сечение которого 1 см^2 . С какой силой стержень будет действовать на стенки, если его нагреть на 5°C ? Коэффициент линейного теплового расширения стали $1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, модуль упругости $2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Решение

Пусть l_0 — начальная длина стержня до нагрева, равная расстоянию между стенками, S — площадь его поперечного сечения. Если бы стержень находился в свободном состоянии, его длина после нагрева на температуру Δt стала бы такой:

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t).$$

Отсюда относительное удлинение стержня определится следующим выражением:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \alpha\Delta t. \quad (2.33)$$

Чтобы вставить стержень между стенками, его придется сжать на величину $\Delta l = l - l_0$. Пусть F — величина силы,

которую следует приложить к стержню, чтобы сжать его. Тогда по закону Гука имеем

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{F}{SE}, \quad F = SE \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.34)$$

С учетом выражения (2.33) получим

$$F = SE \alpha \Delta t. \quad (2.35)$$

Мы определили силу, действующую на стержень после его нагрева со стороны стенки. Но по третьему закону динамики с такой же по величине силой стержень действует на стенку. Численный расчет дает

$$F = 1,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1,1 \text{ кН}.$$

Задача 2.7

Почему в бетонных конструкциях в качестве арматуры используется только железо (железобетон), а другие металлы, например дюралюминий, не применяются?

Решение

Большая прочность железобетонных конструкций связана с тем, что коэффициенты линейного теплового расширения бетона и железа близки между собой. Если в качестве арматуры использовать металл, коэффициент теплового расширения которого заметно отличается от коэффициента теплового расширения бетона, то при изменении температуры деформации арматуры и бетона будут существенно разными. В результате в конструкции возникнут заметные напряжения, которые не только уменьшат ее прочность, но и могут привести к разрушению.

Задача 2.8

На деревянное колесо диаметром 100 см требуется надеть железную шину, диаметр которой на 5 мм меньше. На сколько следует для этого повысить температуру шины? Коэффициент линейного теплового расширения железа $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

Решение

Если диаметр колеса обозначить d , то длина обода колеса $l = \pi d$. Диаметр железной шины по условию задачи меньше диаметра колеса на величину $\Delta d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$. Длина окружности шины (l_0) равна $\pi(d - \Delta d)$. Чтобы надеть шину на колесо, ее длину следует увеличить на $\Delta l = l - l_0$. Для этого нужно повысить температуру шины на некоторую величину Δt . Определим эту величину из уравнения

$$l = l_0(1 + \alpha \Delta t), \quad \frac{l - l_0}{l_0} = \alpha \Delta t. \quad (2.36)$$

Отсюда получим

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{\alpha(d - \Delta d)}, \quad \Delta t = 420^\circ \text{С}. \quad (2.37)$$

Задача 2.9

Два одинаковых стальных моста должны быть построены один на севере, другой на юге. Каковы должны быть при 0°С зазоры, компенсирующие удлинение моста при изменении температуры, если на юге возможны колебания от -10 до $+50^\circ \text{С}$, а на севере от -50 до $+20^\circ \text{С}$? При 0°С длина моста 100 м. Коэффициент линейного теплового расширения стали принять равным $1 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$.

Решение

При температуре ниже 0°C длина моста уменьшается, а зазор увеличивается. Поэтому зазор следует определять по максимальной температуре выше 0°C .

Для моста на юге

$$l_1 - l_0 = l_0 \alpha t_1, \quad l_1 - l_0 = 5 \text{ см.} \quad (2.38)$$

Для моста на севере

$$l_2 - l_0 = l_0 \alpha t_2, \quad l_2 - l_0 = 2 \text{ см.} \quad (2.39)$$

Задача 2.10

Какие механические напряжения возникают в стальной балке при температуре $t = -10^{\circ}\text{C}$, если эта балка была жестко закреплена при температуре $t_1 = 10^{\circ}\text{C}$? Коэффициент линейного теплового расширения стали принять равным $1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, модуль упругости $2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$.

Решение

Предположим, что длина балки при ее закреплении составляла l_0 . При понижении температуры на $\Delta t = t_1 - t$ длина незакрепленной балки изменилась бы на величину

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t. \quad (2.40)$$

Поскольку же балка жестко закреплена, в ней возникнут механические напряжения, определяемые законом Гука:

$$\Delta l = l_0 \frac{\sigma}{E}. \quad (2.41)$$

Из выражений (2.40) и (2.41) для напряжения получим:

$$\sigma = E \alpha \Delta t, \quad \sigma = 46 \text{ МПа.} \quad (2.42)$$

Задача 2.11

Две пластинки (одна — из стали, другая — из бронзы) толщиной (d) 20 мм каждая склепаны на концах так, что при некоторой температуре образуют плоскую биметаллическую пластинку. Каков будет радиус изгиба биметаллической пластинки, если увеличить ее температуру на 100°C ? Коэффициенты линейного теплового расширения стали и бронзы: $\alpha_1 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_2 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ соответственно.

Решение

Так как склепанные пластинки имеют разные коэффициенты линейного теплового расширения, при нагревании этих пластинок изменение их линейных размеров тоже будет разным: линейный размер бронзовой пластинки, имеющей больший коэффициент линейного теплового расширения, окажется больше линейного размера стальной пластинки. А поскольку пластинки склепаны между собой, произойдет изгиб составной биметаллической пластинки (рис. 2.5).

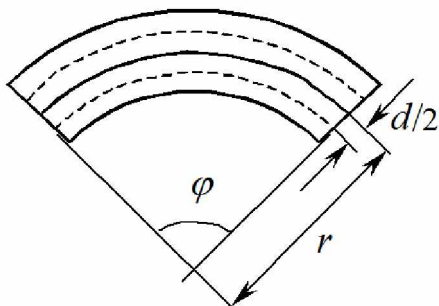


Рис. 2.5

Полагаем, что средняя линия каждой пластинки (эти линии обозначены пунктиром) имеет длину, которая была бы у пластинки в неизогнутом состоянии.

Из рис. 2.5 видно, что длины средних линий склепанных пластинок после нагревания определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\varphi(r - d/2) &= l(1 + \alpha_1 \Delta t), \\ \varphi(r + d/2) &= l(1 + \alpha_2 \Delta t).\end{aligned}\tag{2.43}$$

Отсюда получим

$$r = \frac{d[2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\Delta t]}{2(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t}, \quad r = 22,5 \text{ см.} \tag{2.44}$$

Задача 2.12

Стальной бензобак автомобиля емкостью V_0 70 л целиком заполнили бензином при температуре 20°C . После этого автомобиль оставили на солнце, и бак разогрелся до 50°C . Сколько бензина вытечет из бака? Коэффициент объемного расширения бензина $\beta_1 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, коэффициент линейного расширения стали $\alpha_2 = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$.

Решение

При нагревании расширяются и бензин, и бак. Объем бензина после нагрева (V_1) составит:

$$V_1 = V_0(1 + \beta_1 \Delta t).\tag{2.45}$$

Определим величину изменения объема бензина:

$$\Delta V_1 = V_1 - V_0 = V_0 \beta_1 \Delta t.\tag{2.46}$$

Аналогично определяется величина изменения объема бака:

$$\Delta V_2 = V_2 - V_0 = V_0 \beta_2 \Delta t, \quad \beta_2 = 3\alpha_2.\tag{2.47}$$

Здесь учтено, что коэффициент объемного расширения стали равен утроенному коэффициенту ее линейного расширения.

Объем вытекшего бензина:

$$\Delta V = \Delta V_1 - \Delta V_2 = V_0(\beta_1 - \beta_2)\Delta t. \quad (2.48)$$

Численный расчет дает

$$\Delta V \approx 2 \text{ л.}$$

МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Гидроаэромеханика — раздел механики, в котором изучаются условия равновесия и закономерности движения жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами.

Являясь частью классической физики, гидроаэромеханика имеет важное прикладное значение в машиностроении, судостроении, строительстве гидросооружений.

При проектировании некоторых архитектурных сооружений также используются законы гидродинамики. Это, например, Большой каскад, блестящий памятник искусства барокко, — главное сооружение грандиозной фонтанной системы Петергофа. Задуманный Петром Первым, он создавался выдающимися архитекторами, которые проявили незаурядные инженерные способности, спроектировав каскад таким образом, чтобы потоки воды в нем были максимальными.

Обычно в гидродинамике термин «жидкость» обозначает как капельную жидкость, так и газ. Случаи, когда речь идет о газах, мы будем специально оговаривать.

Жидкость обладает определенными свойствами, принципиально отличающими ее от твердого тела. Если не касаться молекулярного строения вещества, то эти особенности состоят в следующем.

В отличие от твердого тела жидкость почти не обладает сопротивлением формы, т. е. для нее модуль сдвига равен нулю,

$G = 0$. Как следствие в поле силы тяжести жидкость легко принимает форму сосуда, в котором находится.

Прочность жидкости на растяжение пренебрежимо мала по сравнению с ее прочностью на сжатие. Поэтому полагают, что жидкость растянуть невозможно. Часто используют модель несжимаемой жидкости, что заметно упрощает решение задач гидродинамики. Приближение несжимаемой жидкости выполняется с высокой точностью в случае капельных жидкостей ввиду малых изменений их плотности при значительных изменениях давления. Так, например, если воду поместить в цилиндр с подвижным поршнем и увеличить давление от одной до двух атмосфер, это уменьшит объем воды только в отношении 1 : 20 000. Такое повышение давления определенной массы воздуха при неизменной температуре вызывает уменьшение объема в соотношении 1:2 в соответствии с законом Бойля — Мариотта. Однако многолетние исследования воздушных потоков показывают, что изменение давления воздуха лишь в исключительных случаях вызывает заметное изменение его плотности.

В сообщающихся сосудах однородная по плотности жидкость устанавливается на одном уровне.

3.1. Гидростатика

Гидростатика — раздел гидроаэромеханики, в котором изучается равновесие жидкости и действие неподвижной жидкости на погруженные в нее тела. Важнейшей задачей гидростатики является анализ распределения давления в покоящейся жидкости. Зная распределение давления, можно рассчитать силы, которыми жидкость действует на погруженные в нее тела. В частности, можно вывести условия плавания тел на поверхности или внутри жидкости. В инженерной практике законы

гидростатики используются для проектирования гидравлических прессов, жидкостных манометров⁴ и других гидромашин и приборов.

3.2. Закон Паскаля

Рассмотрим жидкость, помещенную в некоторый сосуд. Под действием силы тяжести верхние слои неподвижной жидкости оказывают давление на нижние слои. Чем больше высота жидкости в сосуде, тем больше сила давления, с которой жидкость действует на дно сосуда.

В покоящейся жидкости мысленно выделим цилиндрический элемент объема высотой h и площадью основания S . Ось цилиндра параллельна направлению вектора силы тяжести \mathbf{F}_T . Если плотность жидкости ρ , то величина Sh есть объем рассматриваемого элемента жидкости, а величина ρSh — масса этого элемента. Поскольку жидкость неподвижна, вес выделенного объема равен силе тяжести:

$$P = F_T = \rho Shg, \quad (3.1)$$

где g — модуль ускорения свободного падения.

Величина силы, действующей со стороны жидкости на единицу поверхности, такова:

$$p = \frac{P}{S} = \rho gh. \quad (3.2)$$

Давление p , создаваемое покоящейся жидкостью в поле силы тяжести, называют **гидростатическим давлением**.

Единица измерения давления в СИ — *паскаль* (Па):

⁴ Манометр — прибор для измерения давления в жидкостях и газах.

$$1 \text{ Па} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

В технике, метеорологии широко используются внесистемные единицы давления. Из них наиболее распространенными являются *физическая (или нормальная) атмосфера* (атм) и *миллиметр ртутного столба* (мм рт. ст.)

$$1 \text{ атм} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad 1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ Па}.$$

Давление неподвижной жидкости на любой глубине h складывается из внешнего давления (обычно атмосферного) p_0 и гидростатического давления столба жидкости

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (3.3)$$

В неподвижной жидкости сила давления всегда перпендикулярна поверхности, на которую эта сила действует, независимо от ориентации поверхности внутри жидкости. Более того, давление в покоящейся жидкости изотропно, т. е. действует во всех направлениях одинаково. Этот факт и составляет содержание **закона Паскаля**: давление, производимое внешними силами на неподвижную жидкость, передается жидкостью во всех направлениях одинаково.

Закон Паскаля был использован для создания так называемого *гидравлического пресса* — устройства для трансформации сил. Гидравлический пресс состоит из двух цилиндров разных диаметров, снизу соединенных трубкой (рис. 3.1).

Если к поршню малой площади S_1 приложить небольшую силу \mathbf{F}_1 , то этот поршень будет оказывать на жидкость в узком цилиндре давление, определяемое как

$$p = \frac{F_1}{S_1}. \quad (3.4)$$

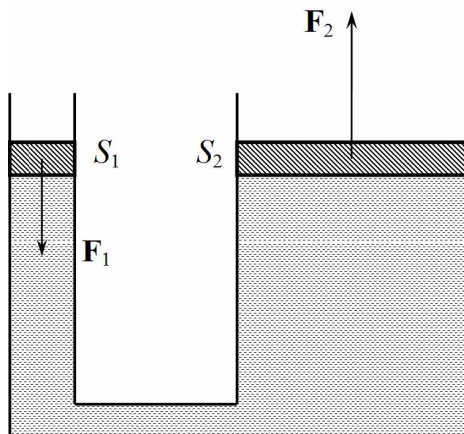


Рис. 3.1

Чтобы жидкость в цилиндрах оставалась в состоянии равновесия, к жидкости в широком цилиндре следует приложить некоторую силу F_2' , равную по величине и направленную противоположно силе F_2 , с которой жидкость действует на поршень, имеющий площадь S_2 . По закону Паскаля давление жидкости в цилиндрах должно быть одинаковым. Отсюда сила, действующая на поршень большей площади, такова:

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \quad (3.5)$$

Таким образом, в гидравлическом прессе небольшая сила F_1 трансформируется в большую силу F_2 .

3.3. Закон Архимеда

Гидростатическое давление вызывает статическую подъемную силу, действующую на любое погруженное в жидкость тело. Этот закон был открыт Архимедом.

Формулируется **закон Архимеда** так: на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, равная весу вытесненной жидкости.

Для доказательства закона Архимеда рассмотрим цилиндр, погруженный в жидкость так, что его ось параллельна силе тяжести (рис. 3.2).

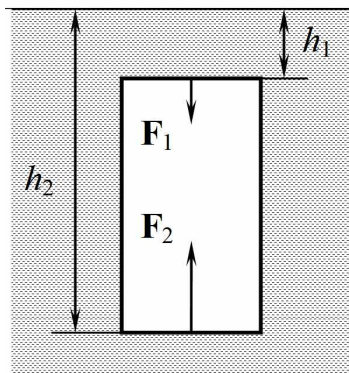


Рис. 3.2

Силы, действующие на боковую поверхность цилиндра, взаимно компенсируют друг друга, стремясь сжать цилиндр. Силы F_1 и F_2 , действующие на верхнее и нижнее основания цилиндра, различны, так как основания находятся на разных высотах от свободной поверхности жидкости. Если S — площадь основания, ρ — плотность жидкости и p_0 — атмосферное давление над свободной поверхностью жидкости, то величины действующих сил определяются следующими выражениями:

$$F_1 = (p_0 + \rho gh_1)S, \quad F_2 = (p_0 + \rho gh_2)S, \quad (3.6)$$

где g — ускорение свободного падения.

Отсюда величина результирующей выталкивающей силы будет такова:

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho gV, \quad (3.7)$$

где $V = (h_2 - h_1)S$ — объем вытесненной жидкости, равный объему цилиндра.

Из полученного выражения следует, что архимедова сила действительно равна весу вытесненной жидкости.

Очевидно, что в состоянии невесомости гидростатическое давление отсутствует, и, следовательно, сила Архимеда не действует.

Закон Архимеда справедлив для тел любой формы. При этом точка приложения силы Архимеда может не совпадать с центром масс тела (точка C на рис. 3.3). Так, например, на рис. 3.3, *а* архимедова сила приложена к точке центра масс вытесненной телом жидкости. Эта точка D называется *центром давления*.

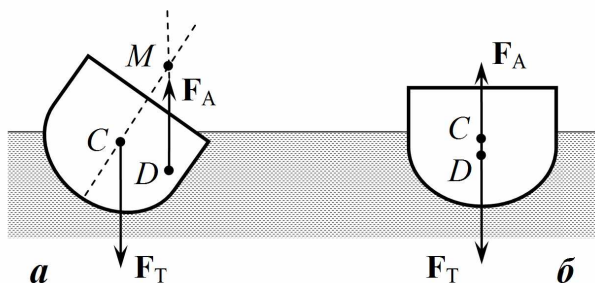


Рис. 3.3

Если центр тяжести тела не совпадает с центром давления, то на тело действует момент сил относительно любой оси вращения, перпендикулярной плоскости рисунка. Этот момент сил стремится развернуть тело так, чтобы сила тяжести и

выталкивающая сила были направлены вдоль одной прямой (см. рис. 3.3, б). При этом вращательный момент становится равным нулю.

Устойчивость равновесия тел, плавающих в жидкости, зависит от соотношения силы тяжести и выталкивающей силы Архимеда, а также от взаимного расположения центров тяжести и давления.

Для тела, целиком погруженного в жидкость, равновесие будет устойчивым, если обе силы направлены вдоль одной прямой, а положение центра тяжести окажется ниже центра давления. В этом случае при отклонении от равновесия на тело будет действовать момент сил, который вернет его в положение равновесия. Если центр тяжести окажется выше центра давления, то равновесие будет неустойчивым.

Равновесие тела, плавающего на поверхности жидкости, тоже достигается при расположении центров тяжести и давления на одной прямой. Но поскольку при отклонении тела от положения равновесия центр давления в общем случае смещается, условия устойчивости равновесия изменяются. Пусть центры тяжести и давления лежат на одной прямой. Если центр тяжести находится ниже центра давления, то равновесие плавающего тела устойчиво. В этом случае момент сил возвращает тело в положение равновесия. Если же центр тяжести окажется выше центра давления (см. рис. 3.3, б), то такое равновесие будет условно устойчивым. При расположении метacentра M (точки пересечения вертикали, проведенной через центр давления, с плоскостью симметрии тела; см. рис. 3.3, а) выше центра тяжести равновесие устойчивое, в противном случае — неустойчивое. Поэтому центры тяжести кораблей стараются расположить как можно ниже. Тяжелый груз размещают в трюме корабля, а не на палубе.

3.4. Условие плавания тел

На тело, погруженное в жидкость, кроме выталкивающей силы Архимеда F_A действует сила тяжести $F_T = mg = \rho V g$, где m , ρ и V — соответственно масса, плотность и объем тела. Эти силы действуют в противоположных направлениях. Равнодействующая силы Архимеда и силы тяжести называется подъемной силой.

Если сила тяжести больше выталкивающей силы ($F_T > F_A$), то тело тонет, а его вес уменьшается:

$$P = F_T - F_A = (\rho V - \rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}})g, \quad (3.8)$$

где $\rho_{\text{ж}}$ и $V_{\text{ж}}$ — соответственно плотность и объем вытесненной жидкости.

Для того чтобы тело плавало, должно выполняться следующее условие:

$$F_T = F_A, \quad \rho V = \rho_{\text{ж}} V_{\text{ж}}. \quad (3.9)$$

Очевидно, при условии плавания вес тела равен нулю.

Если в жидкость погружено неоднородное по составу тело, то под плотностью ρ следует понимать его среднюю плотность. Например, если речь идет о погружении подводной лодки, часть объема которой заполнена воздухом, а часть — водой, то под средней плотностью следует понимать отношение общей массы лодки к ее общему объему. При полном погружении общий объем подводной лодки равен объему вытесненной жидкости, а условие плавания (3.9) запишется в виде $\rho = \rho_{\text{ж}}$.

3.5. Гидростатическое взвешивание

Закон Архимеда используют для экспериментального определения средней плотности ρ различных тел методом гидростатических весов. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть P — вес тела в воздухе, а P_1 — вес этого же тела в жидкости, плотность которой ρ_1 известна. При полном погружении объем тела равен объему вытесненной жидкости. Тогда из формулы (3.8) имеем

$$P_1 = (\rho - \rho_1)Vg.$$

Пренебрегая плотностью воздуха по сравнению с плотностью тела, можно считать, что вес неподвижного тела в воздухе равен силе тяжести $P = \rho Vg$. Тогда плотность тела такова:

$$\rho = \rho_1 \frac{P}{P - P_1}. \quad (3.10)$$

Этот же метод может быть использован для экспериментального определения неизвестной плотности ρ_2 какой-либо жидкости. Пусть измерены P — вес тела в воздухе, P_1 — вес этого тела в жидкости с известной плотностью ρ_1 и P_2 — вес тела в жидкости, плотность ρ_2 которой необходимо определить. Записывая формулу (3.10) для каждой жидкости и приравнявая правые части, получим:

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{P - P_2}{P - P_1}. \quad (3.11)$$

Заметим, что результат определения плотности жидкости не зависит от плотности и объема используемого твердого тела.

3.6. Гидродинамика

Гидродинамика — раздел механики сплошных сред, в котором изучается движение жидкостей и газов с дозвуковыми скоростями. Это ограничение скорости позволяет во многих задачах считать и жидкость, и газ несжимаемыми средами, что существенно упрощает теорию. Прикладные задачи гидродинамики связаны, как правило, с исследованием взаимодействия движущейся жидкости с твердыми телами.

Идеальная жидкость является наиболее простой моделью движущейся сплошной среды. Предполагается, что жидкость не обладает диссипативными свойствами, т. е. лишена вязкости и теплопроводности. Несмотря на то, что данная модель — идеализированная, при ее использовании могут быть изучены многие характерные свойства движения жидкости и газа, особенно вдали от поверхности обтекаемых тел. Применимость модели идеальной жидкости определяется не свойствами самой жидкости, а условиями ее движения. Вдали от обтекаемого тела скорость движения жидкости и ее температура почти однородны. А вязкость и теплопроводность проявляются в области неоднородного движения жидкости и при неоднородной температуре.

3.7. Линии тока и траектории. Трубка тока

Л и н и я т о к а — это линия, касательная к которой дает направление скорости движения жидкости в точке касания в данный момент времени (рис. 3.4).

Т р а е к т о р и я — это линия, описываемая индивидуальной частицей жидкости при движении.



Рис. 3.4

При стационарном движении линии тока и траектории совпадают. При нестационарном движении это, вообще говоря, разные линии.

Для визуализации течения экспериментаторы вводят в движущуюся жидкость высокодисперсный порошок, частицы которого при соответствующем освещении ярко светятся.

Если после введения порошка сфотографировать поле течения с небольшой выдержкой, мы получим на снимке множество коротких штрихов, «прочерчиваемых» за короткое время экспозиции множеством светящихся частиц порошка. Подбирая кривые, касательные к некоторому последовательному ряду штрихов, получим линии тока в жидкости в данный момент времени. В другой момент времени нестационарного движения жидкости линии тока могут быть другими.

Если же время экспозиции значительно увеличить, то каждая частица «прочертит» на снимке непрерывную линию через все поле течения, охватываемого объективом. Эти линии, очевидно, и являются траекториями частиц жидкости.

Касательные к линии тока в различных ее точках дают направление скорости разных индивидуальных частиц в один и тот же момент времени. Касательные к траектории в различных ее точках дают направление скорости одной и той же индивидуальной частицы в разные моменты времени.

Если в жидкости мысленно выделить некоторый замкнутый контур и через все его точки провести линии тока, то

они составят некоторую трубку, называемую *трубкой тока* (рис. 3.5).

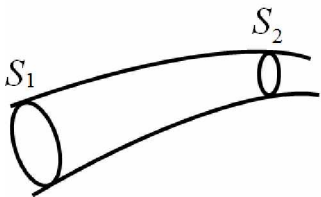


Рис. 3.5

Замечательное свойство трубки тока состоит в том, что по определению линий тока через ее боковую поверхность нет потока жидкости. Жидкость в трубку тока может поступать только через ее торцы.

3.8. Уравнение неразрывности

Рассмотрим трубку тока (см. рис. 3.5) с поперечными сечениями S_1 и S_2 настолько малыми, что скорости жидкости v_1 и v_2 во всех точках этих сечений одинаковы. Кроме того, сечения ориентированы перпендикулярно линиям тока. В этом случае при стационарных условиях масса жидкости, протекающей через каждое из сечений за единицу времени, будет одинакова и составит

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2, \quad (3.12)$$

где ρ_1 и ρ_2 — плотности жидкости в сечениях S_1 и S_2 соответственно.

Это соотношение называют **уравнением неразрывности**, которое по своему смыслу представляет закон сохранения массы жидкости. Напомним, что жидкость не может выйти из трубки тока или попасть внутрь трубки извне через ее боковую

поверхность. Следовательно, при стационарном течении масса жидкости, проходящая через любые поперечные сечения трубы тока за единицу времени, должна быть одинаковой.

Если жидкость можно рассматривать как несжимаемую, то $\rho_1 = \rho_2$ и уравнение неразрывности запишутся в следующем виде:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (3.13)$$

Из полученного соотношения следует, что модули скоростей несжимаемой жидкости в двух сечениях трубы тока обратно пропорциональны площадям сечений. Таким образом, если жидкость течет в трубе переменного сечения, то согласно уравнению неразрывности ее скорость в узких местах трубы больше, чем в широких.

Отметим, что уравнение неразрывности (3.13) справедливо как для стационарных, так и для нестационарных течений несжимаемой жидкости.

Если весь поток движущейся жидкости мысленно разбить на отдельные тонкие трубы тока, то, анализируя движения жидкости в элементарных трубках тока, можно составить представление о движении жидкости в целом.

3.9. Уравнение Бернулли

Получим уравнение баланса полной механической энергии для единицы объема движущейся жидкости. Очевидно, что это можно сделать только для идеальной жидкости. При движении вязкой жидкости вследствие работы сил внутреннего трения часть механической энергии перейдет во внутреннюю энергию жидкости и выделится в виде тепла.

Рассмотрим в движущейся жидкости узкую трубку тока, в общем случае имеющую переменное поперечное сечение и расположенную под наклоном к горизонту (рис. 3.6). Мысленно выделим в ней столбик жидкости $ABCD$. Площадь поперечного сечения, давление и модуль скорости потока в широкой части (сечение AB) соответственно равны S_1 , p_1 , v_1 , а в узкой части (сечение CD) — S_2 , p_2 , v_2 .

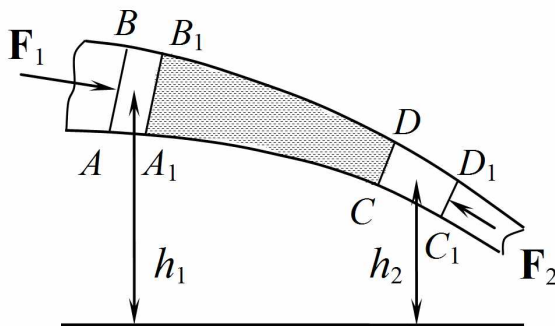


Рис. 3.6

Пусть жидкость течет слева направо под действием сил давления \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , а также силы тяжести. Тогда за малый промежуток времени Δt выделенный объем жидкости сместится вправо и займет часть трубки $A_1B_1C_1D_1$. При этом силы давления совершают работу

$$A = A_1 + A_2 = F_1 \cdot AA_1 - F_2 \cdot CC_1. \quad (3.14)$$

Здесь учтено, что сила давления \mathbf{F}_2 совершает отрицательную работу A_2 , так как эта сила действует в противоположную направлению перемещения жидкости сторону. Поскольку

$$F_1 = p_1 S_1, \quad F_2 = p_2 S_2, \quad AA_1 = v_1 \Delta t, \quad CC_1 = v_2 \Delta t,$$

работа сил давления

$$A = p_1 v_1 S_1 \Delta t - p_2 v_2 S_2 \Delta t. \quad (3.15)$$

При стационарном течении энергия объема жидкости, заключенного между сечениями $A_1 B_1$ и CD (заштрихованная на рис. 3.6 область), остается неизменной. Это означает, что все происходит так, как если бы жидкость, занимавшая в начальный момент времени объем $ABB_1 A_1$, за рассматриваемый промежуток времени Δt переместилась бы вправо и заняла объем $CDD_1 C_1$. Поэтому для определения изменения энергии движущейся жидкости достаточно учесть лишь изменение энергии элемента объема жидкости, переходящей из области $ABB_1 A_1$ в область $CDD_1 C_1$. В соответствии с законом сохранения энергии работа внешних сил давления равна изменению энергии этого элемента. Его объем $\Delta V = S_1 \cdot AA_1 = S_2 \cdot CC_1$ не изменяется с течением времени, так как жидкость несжимаема. Тогда масса рассматриваемого элемента объема жидкости

$$m = \rho \Delta V = \rho S_1 \cdot AA_1 = \rho S_2 \cdot CC_1.$$

Изменение кинетической энергии этого элемента при движении вдоль трубки тока определится следующим выражением:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho \Delta V (v_2^2 - v_1^2).$$

На рис. 3.6 показано, что вначале элемент объема находился на высоте h_1 , а затем оказался на высоте h_2 . При этом изменение его потенциальной энергии в поле силы тяжести

$$\Delta E_n = mg(h_2 - h_1) = \rho \Delta V g(h_2 - h_1),$$

где g — величина ускорения свободного падения.

Изменение полной механической энергии равно работе сил давления:

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_n = A.$$

Подставляя в это соотношение полученные выше выражения для работы и изменений кинетической и потенциальной энергий и разделив их на величину рассматриваемого элемента объема ΔV , с учетом уравнения неразрывности (3.13) получим:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 + \rho gh_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2 + \rho gh_2. \quad (3.16)$$

Это выражение называется **уравнением Бернулли**. Оно имеет смысл уравнения баланса механической энергии единицы объема идеальной несжимаемой жидкости при ее стационарном движении. Уравнение (3.16) получено для двух произвольных сечений трубки тока. Поэтому **закон Бернулли** можно сформулировать так: сумма давления и плотностей кинетической и потенциальной энергий при стационарном течении идеальной несжимаемой жидкости остается постоянной для любого поперечного сечения потока.

Уравнение Бернулли выведено для достаточно узкой трубки тока и строго справедливо, когда эта трубка тока сжимается в линию тока. Поэтому вдоль любой линии тока выполняется соотношение

$$\frac{\rho v^2}{2} + p + \rho gh = \text{const}. \quad (3.17)$$

Следует иметь в виду, что в общем случае для разных линий тока значения постоянной (const) будут различными.

Если жидкость течет в горизонтально расположенной трубе, то $h_1 = h_2$ и уравнение (3.16) принимает такой вид:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2. \quad (3.18)$$

Отсюда следует, что в горизонтально расположенной трубе давление жидкости больше в том сечении, где скорость потока меньше. И, наоборот, давление жидкости меньше в том сечении трубы, где скорость потока больше.

3.10. Применение уравнения Бернулли

Покажем на ряде примеров, как с использованием уравнения Бернулли можно решать задачи гидродинамики и объяснять явления, наблюдаемые в природе и часто встречающиеся в инженерной практике.

Скорость истечения идеальной несжимаемой жидкости из сосуда

В качестве первого примера рассмотрим стационарное истечение идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке сосуда (рис. 3.7).

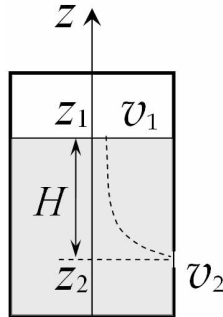


Рис. 3.7

Если полагать, что сосуд достаточно велик, а отверстие мало, то можно считать, что уровень жидкости в сосуде не из-

меняется заметно в течение достаточно продолжительного промежутка времени. Пусть на поверхность жидкости в сосуде действует давление p_0 (например, атмосферное). Будем также полагать, что струя вытекает в пространство, где внешнее давление также равно p_0 . Обобщение на различные давления не составляет труда.

Проведем некоторую гипотетическую линию тока и выберем на ней две точки: одну — на поверхности жидкости в сосуде (точка 1), другую — внутри отверстия (точка 2). Тогда для этой линии тока можно записать уравнение Бернулли:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_2. \quad (3.19)$$

Поскольку поверхность жидкости в сосуде предполагается неподвижной ($v_1 = 0$), из последнего равенства получаем

$$v_2 = \sqrt{2gH}. \quad (3.20)$$

Заметим, что такую же скорость приобретает тело, падающее в пустоте с высоты H .

Распределение давления в трубе переменного сечения

Рассмотрим стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости в трубе переменного сечения. Действием силы тяжести можно пренебречь, если труба расположена горизонтально. Выберем какую-либо линию тока (рис. 3.8).

На этой линии тока рассмотрим две произвольные точки. Тогда для этих точек на выбранной линии тока в случае несжимаемой жидкости можно записать:

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}. \quad (3.21)$$

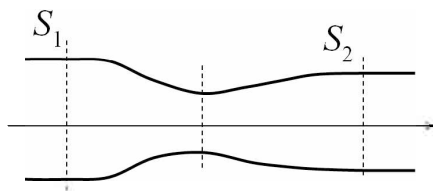


Рис. 3.8

Из последнего соотношения видно, что в той точке линии тока, где скорость больше, гидростатическое давление меньше и наоборот.

Неразрывность движения жидкости в трубе требует выполнения условия

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (3.22)$$

Из этого условия следует, что скорость движения несжимаемой жидкости тем больше, чем меньше сечение трубы, и, очевидно, максимальна в самом узком месте трубы. Соответственно в самом узком месте трубы давление минимально. Если некоторые участки трубы соединить с манометрическими трубками, то жидкость в них установится на разных уровнях. Самый низкий уровень манометрической жидкости будет в самом узком сечении трубы.

Приведем ряд примеров, которые могут быть объяснены при помощи установленного вывода.

Запрещается сближение судов, идущих параллельным курсом. Действительно, при этом вода между двумя судами увлекается в движение и приобретает некоторую дополнительную скорость, а давление между судами оказывается меньше давления воды на противоположный борт. Поэтому возникает сила, стремящаяся сблизить суда, что может привести к их столкновению (рис. 3.9).

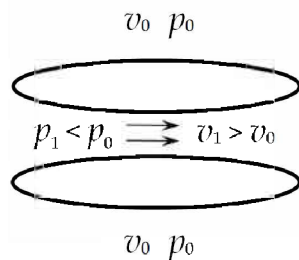


Рис. 3.9

Хорошо известен и такой экспериментальный факт: если продуть воздух между двумя параллельными листками бумаги, то они будут стремиться сблизиться (рис. 3.10).

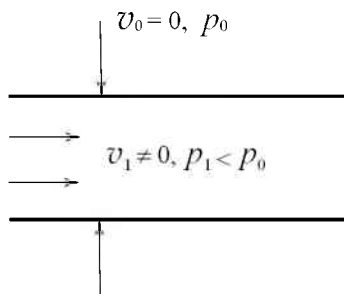


Рис. 3.10

Действие пульверизатора также легко понять на основании полученного вывода. Изначально жидкость в трубочке и жидкость во флаконе находятся на одном уровне, а при продувании воздуха его давление в верхнем торце трубочки уменьшается. Соответственно атмосферное давление внутри флакона выталкивает жидкость по трубочке вверх, и она разбрызгивается потоком воздуха (рис. 3.11).

При сильных и порывистых ветрах иногда наблюдается необычное, на первый взгляд, явление. Крышу дома вместе

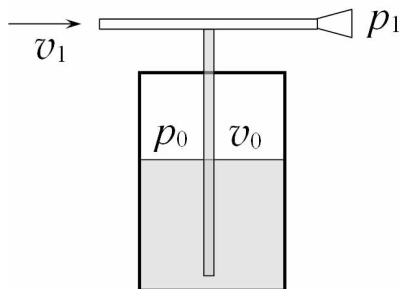


Рис. 3.11

с верхним венцом бревен ветер сначала приподнимает, а уже затем опрокидывает. Нетрудно понять, почему это происходит. Изначально давление воздуха снаружи и давление воздуха на чердаке одинаковы, а вот при резком порыве ветра давление над крышей уменьшается. И если давление на чердаке не успеет снизиться до уровня давления внешнего, крышу поднимет создавшейся значительной результирующей силой, направленной вверх, а затем ветром сбросит с дома (рис. 3.12).

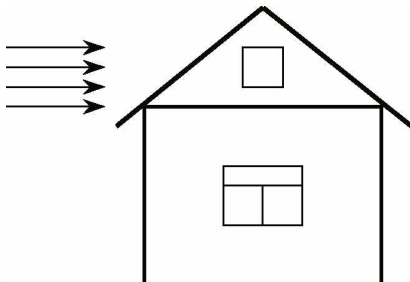


Рис. 3.12

Кавитация

Если увеличивать скорость движения жидкости по трубе (см. рис. 3.8) или при том же самом расходе жидкости умень-

получить отрицательное давление. Действительно, из уравнения Бернулли имеем

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_{\max}^2}{2} + \frac{p_{\min}}{\rho}. \quad (3.23)$$

С учетом уравнения неразрывности

$$v_1 S_1 = v_{\max} S_{\min} \quad (3.24)$$

имеем

$$p_{\min} = p_1 - \frac{\rho v_{\max}^2}{2} \left(1 - \frac{S_{\min}^2}{S_1^2} \right). \quad (3.25)$$

Из соотношения (3.25) следует, что если второй член в правой его части по абсолютной величине будет больше, чем p_1 , то минимальное давление окажется отрицательным. Частицы жидкости, проходящие сечение трубы с отрицательным давлением, будут подвергаться растяжению. Однако мы уже упоминали о том, что жидкость не может находиться в растянутом состоянии длительное время. Она или вскипит, или сплошность ее нарушится в результате образования пузырьков из растворенного в жидкости газа. Так или иначе при падении давления до отрицательных значений в жидкости образуются пузырьки, заполненные паром или газом, растворенным в ней, или тем и другим в той или иной концентрации. Возникает так называемая **кавитация**, т. е. нарушение сплошности движущейся среды.

Явление кавитации играет важную роль в инженерной практике. Дело в том, что пузырьки, пройдя самое узкое сечение, попадают далее в область более высокого давления и схлопываются. Если такой пузырек окажется на стенке трубы, то при

его схлопывании возникнет довольно значительное локальное давление, которое, в свою очередь, приводит к эрозии, т. е. разрушению материала.

Аналогичные явления наблюдаются и при быстром движении тел в жидкости, например при вращении гребных винтов пароходов или лопаток гидротурбин. При этом тоже возникают области растянутой жидкости, в которых образуются пузырьки.

Кавитация приводит к чрезвычайно быстрому износу тел и выходу их из строя. Проблема кавитации до сих пор не решена. В настоящее время нарушение сплошности движущейся среды — предмет интенсивного изучения.

Практически кавитация возникает тогда, когда давление в жидкости падает до давления насыщенных паров при данной температуре:

$$p_{\min} \simeq p_{\text{н}}.$$

Трубка Пито (трубка Прандтля)

При обтекании тупого тела идеальной жидкостью на нем всегда можно указать точку, в которой скорость движения жидкости равна нулю (точка A на рис. 3.13). Точка A называется *критической точкой*. Проведем в эту точку линию тока, которая начинается вдали от тела и оканчивается в точке A . Ее называют *критической линией тока*.

Для критической линии тока можно записать уравнение Бернулли, которое для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{v_{\infty}^2}{2} + \frac{p_{\infty}}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}. \quad (3.26)$$

Из последнего соотношения получим

$$p_0 = p_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2}, \quad v_{\infty} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_{\infty})}{\rho}}. \quad (3.27)$$

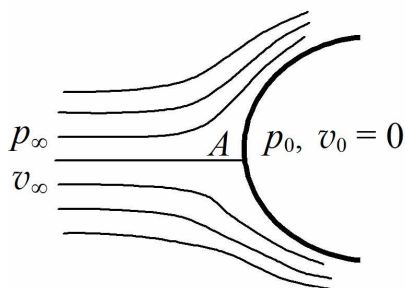


Рис. 3.13

Отсюда видно, что давление в критической точке равно давлению в набегающем потоке плюс некоторой добавке, обязанной своим возникновением торможению жидкости в критической точке. Эта добавка называется скоростным напором. Последнюю формулу в (3.27) можно использовать для измерения скорости движения жидкости или скорости движения тела в неподвижной несжимаемой жидкости.

Прибор, при помощи которого производятся измерения скорости потока, называется трубкой Пито или трубкой Прандтля (рис. 3.14).

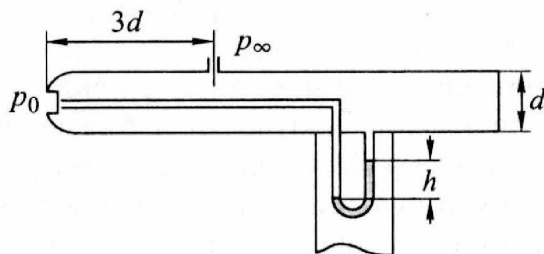


Рис. 3.14

Очевидно, разность давлений $p_0 - p_\infty$ уравнивается давлением столба манометрической жидкости $-\rho_{ж}gh$. Тогда имеем формулу

$$v_{\infty} = \sqrt{\frac{2\rho_{\text{ж}}gh}{\rho}}. \quad (3.28)$$

Здесь g — ускорение свободного падения, $\rho_{\text{ж}}$ — плотность манометрической жидкости, ρ — плотность жидкости, скорость которой измеряется (в частности, это может быть и плотность газа).

Таким образом, помещая трубку Пито в поток жидкости или в поток газа и измеряя создаваемый перепад давления каким-либо манометром, можно довольно просто измерить их скорость. В результате длительного экспериментального и теоретического изучения к настоящему времени выработан определенный стандарт, гарантирующий процентную точность в оптимальном диапазоне измерений. Рекомендации этого стандарта приведены на рис. 3.14.

Как показано на данном рисунке, давление в отверстии на боковой поверхности трубки будет равно давлению вдали от трубки в невозмущенном потоке лишь на расстоянии $3d$ от носика трубки. Любое другое расположение этого отверстия стандартной точности не гарантирует. Причины этого будут понятны при последующем изучении движений идеальной жидкости.

Помещая трубку Пито на носу самолета, можно измерить скорость его полета.

Эффект Магнуса

В 1852 г. немецкий физик и химик Г. Магнус открыл явление возникновения поперечной силы, действующей на тело, вращающееся в набегающем на него потоке жидкости или газа.

Рассмотрим эффект Магнуса на примере обтекания бесконечного цилиндра стационарным потоком идеальной несжимае-

мой жидкости, движущейся со скоростью \mathbf{v}_0 перпендикулярно оси цилиндра. Пусть вокруг поверхности цилиндра существует циркуляция жидкости с линейной скоростью \mathbf{v}_1 (рис. 3.15). Такая циркуляция могла бы возникнуть при вращении цилиндра вокруг своей оси.

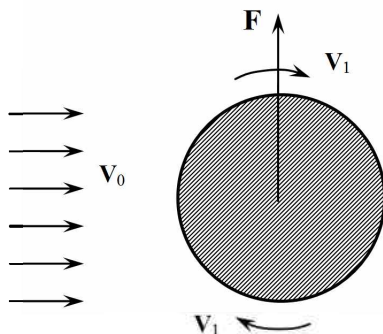


Рис. 3.15

Причину возникновения подъемной силы \mathbf{F} при обтекании цилиндра с циркуляцией нетрудно понять, если обратиться к уравнению Бернулли. Как показано на рис. 3.15, в верхней половине цилиндра скорости набегающего потока жидкости и циркуляционной скорости складываются, а в нижней половине цилиндра — вычитаются. Таким образом, результирующая скорость движения жидкости в верхней половине оказывается больше, чем в нижней. Из уравнения Бернулли тогда следует, что давление жидкости, действующее на верхнюю половину цилиндра, меньше давления жидкости, действующего на нижнюю половину цилиндра. В результате возникает результирующая сила, направленная вверх (см. рис. 3.15).

Приведем несколько примеров, демонстрирующих эффект Магнуса.

Скатываясь с наклонной поверхности, легкий бумажный цилиндр при падении вращается, что существенно изменяет траекторию его движения. Если бы цилиндр не вращался, то он двигался бы по траектории, которая соответствует верхней кривой (рис. 3.16); вращение же делает траекторию более крутой, так как при этом возникает поперечная сила.

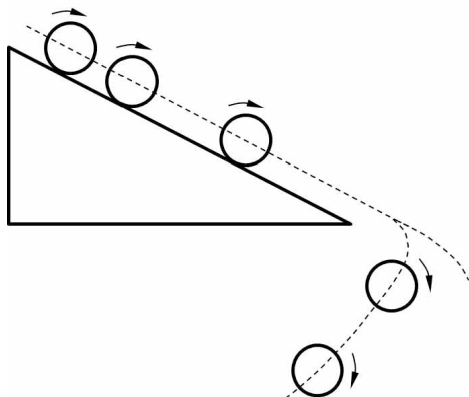


Рис. 3.16

Вращающийся теннисный шарик (или мяч) вследствие вязкости реального воздуха стимулирует вокруг себя циркуляционное движение, что и является причиной возникновения поперечной силы.

Как известно, хорошо закрученный шарик пинг-понга описывает довольно сложные траектории. И если, например, мы хотим, чтобы над столом траектория шарика была как можно круче, то при подаче требуется закрутить его по часовой стрелке. В этом случае возникает сила, направленная вниз. Того же эффекта добиваются и волейболисты, подавая закрученный мяч.

В 1924 г. немецкий авиационный инженер и изобретатель А. Флеттнер построил роторное судно, использующее рассматриваемый эффект (рис. 3.17).

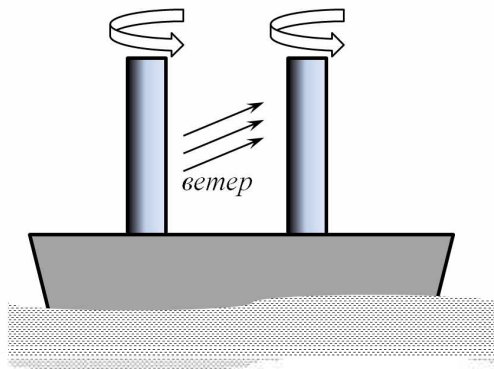


Рис. 3.17

На судне были установлены два легких, обтянутых парусиной цилиндра, которые приводились во вращение моторами. Диаметр цилиндров составлял 2,8 м, высота — 18 м. Такое судно могло идти со скоростью около 15 км/ч. Причем максимальная скорость достигалась при боковом ветре, когда сила Магнуса была направлена вдоль корпуса судна. Однако это изобретение не получило своего дальнейшего развития, так как не выдержало конкуренции с судами на паровых и дизельных двигателях.

Эффект Магнуса является также одной из причин отклонения траектории снаряда от вертикальной плоскости, проходящей через ось ствола орудия (явление дериивации).

Снова обратим внимание на то, что в случае идеальной жидкости, лишенной сил внутреннего трения, мы не могли бы, вращая цилиндр, создать и вращательное движение жидкости.

Только благодаря вязкости жидкости вращающийся цилиндр приводит ее во вращательное движение. Отвлекаясь же от причин, инициирующих вращательное движение жидкости, мы в рамках модели идеальной жидкости рассмотрели и объяснили многие явления, наблюдаемые в реальных жидкостях.

Русский ученый Н. Е. Жуковский (1847—1921), основоположник современной аэродинамики, на основе эффекта Магнуса описал возникновение подъемной силы крыла бесконечного размаха.

Вязкость воздуха — причина его циркуляции вокруг крыла самолета. Профили крыльев имеют острую заднюю кромку. Вблизи этой кромки возникают вихри, в которых воздух вращается против часовой стрелки. Вихри увеличиваются, отрываются от крыла и уносятся набегающим потоком воздуха. При этом вблизи крыла возникает циркуляция остальной массы воздуха, направленная по часовой стрелке (рис. 3.18).

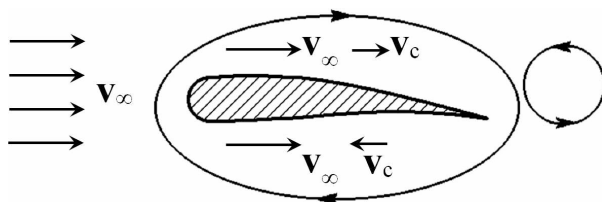


Рис. 3.18

Скорость набегающего потока (\mathbf{v}_∞) и скорость циркуляционного потока (\mathbf{v}_c) над крылом направлены в одну сторону, а под крылом — в противоположные стороны. Поэтому результирующая скорость воздуха над крылом больше результирующей скорости воздуха под крылом. Согласно уравнению Бернулли давление над крылом понижается, а под крылом повышается, и возникает подъемная сила.

3.11. Вязкая жидкость

Прямыми и косвенными экспериментами установлено, что реальная жидкость «прилипает» к поверхности обтекаемого тела. Силы взаимодействия между поверхностными атомами тела и прилегающими к ним молекулами жидкости оказываются достаточными, чтобы последние двигались неразрывно с поверхностью тела. Поэтому на границе тело — вязкая жидкость в каждой точке поверхности скорости жидкости \mathbf{v} и тела \mathbf{u} должны быть равны между собой. Этот экспериментально установленный факт называют **у с л о в и е м п р и л и п а н и я жидкости к поверхности обтекаемого тела.**

Таким образом, вблизи поверхности твердого тела существует слой жидкости, в котором скорость ее течения относительно обтекаемой поверхности возрастает от нуля до некоторого значения скорости в ядре потока. Слой жидкости, в котором величина ее скорости резко увеличивается по мере удаления от твердого тела, называют **п о г р а н и ч н ы м с л о е м.**

В предыдущей главе было показано, что при деформации твердого тела, (т. е. при смещении под действием внешних сил одних частей тела по отношению к другим) в нем возникают упругие напряжения.

Но напряжения могут возникать и вследствие различных скоростей смещений соседних частей среды. В этом легко убедиться, рассмотрев следующий пример.

Пусть жидкость находится между параллельными пластинами, расположенными на расстоянии d друг от друга (рис. 3.19).

Если вдоль свободной поверхности жидкости сдвинуть верхнюю пластину, то она останется в новом положении неподвижной, т. е. упругая сила, возвращающая ее в прежнее положение, отсутствует. Однако для того чтобы пластину сдвинуть, необ-

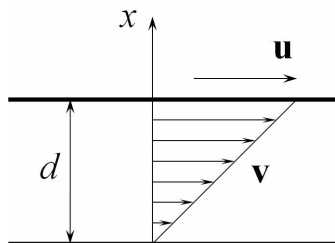


Рис. 3.19

ходимо приложить некоторую силу. Если передвигать пластину вдоль поверхности жидкости прямолинейно и равномерно со скоростью u , то в соответствии с первым законом Ньютона действующая на пластину результирующая сила будет равна нулю. Это означает, что со стороны жидкости на пластину действует сила сопротивления, равная по величине и противоположная по направлению внешней силе. Причем эта сила сопротивления существует лишь тогда, когда пластина движется. Чтобы в рамках гидродинамики, т. е. игнорируя молекулярное строение жидкости, понять механизм возникновения силы сопротивления, разделим мысленно весь объем жидкости на тонкие слои, параллельные пластинам. Слой жидкости, прилегающий непосредственно к движущейся пластине, как бы «прилипает» к ней и вовлекается в движение с той же скоростью u . Следующий слой жидкости вовлекается в движение верхним слоем, но при этом — тормозится нижним, т. е. скорость его движения меньше. По мере удаления слоев жидкости от перемещаемой пластины вглубь скорость их движения непрерывно уменьшается, и на нижней пластине жидкость покоеится. Зависимость скорости v движения жидкости между пластинами от поперечной координаты x показана на рис. 3.19. Таким образом, сила сопротивления возникает тогда, когда скорость движения жидкости

изменяется в направлении нормали к обтекаемой поверхности. Опыт показывает, что величина силы сопротивления пропорциональна площади пластины S , скорости движения верхнего слоя жидкости, которая равна скорости пластины u , и обратно пропорциональна расстоянию d между пластинами:

$$F = \eta \frac{Su}{d}. \quad (3.29)$$

Здесь коэффициент пропорциональности η — феноменологический коэффициент, называемый *коэффициентом сдвиговой вязкости*, или *коэффициентом динамической вязкости*, или просто *вязкостью*. Его значения для любых веществ и при любых температурах должны быть определены из эксперимента или рассчитаны на основе молекулярно-кинетической теории.

Единицей измерения вязкости в СИ является *паскаль-секунда* (Па · с).

В расчетах вместо коэффициента динамической вязкости η часто используют *коэффициент кинематической вязкости* ν . Эти коэффициенты связаны между собой следующим соотношением: $\nu = \eta/\rho$ (ρ — плотность жидкости)

В табл. 3.1 приведены величины динамической (η) и кинематической (ν) вязкости некоторых жидкостей.

Таблица 3.1

Жидкость	$\eta \times 10^3$, Па · с	$\nu \times 10^6$, м ² /с
Вода	1,0	1,0
Воздух	$1,8 \cdot 10^{-2}$	14,0
Спирт этиловый	1,18	1,5
Глицерин	830,0	659,0
Бензин	0,65	0,93

Отметим, что коэффициент динамической вязкости как плотных газов, так и жидкостей слабо зависит от давления и сильно — от температуры. Динамическая вязкость газов с повышением температуры увеличивается, а динамическая вязкость жидкостей — уменьшается.

3.12. Ламинарное и турбулентное течение

Медленное течение жидкостей является упорядоченным, плавным, слоистым. Такое течение называют *ламинарным* (от лат. *lamina* — пластинка, полоска). Ламинарным является, например, течение воды в спокойных реках.

При увеличении скорости упорядоченный слоистый характер течения жидкости нарушается. Оно становится беспорядочным, сопровождается перемешиванием различных слоев жидкости и образованием завихрений. Такое течение жидкости называют *турбулентным* (от лат. *turbulentus* — бурный, беспорядочный). Примерами турбулентного течения являются движение воздушных масс в атмосфере, движение воды в бурных реках, движение дыма из труб и т. д.

Все сценарии зарождения турбулентности основаны на факте возникновения первичных возмущений ламинарного течения. В природе и технике возмущения появляются при обтекании различных препятствий. Турбулентность атмосферы связана с возмущениями воздушного потока при движении вблизи неоднородностей земной поверхности (овраги, лес, горы, строения и т. д.) или при взаимодействии с другими потоками воздуха. Турбулизация воды в реках обусловлена неровностями речного дна, порогами, выступами и т. п. При течении жидкости в трубопроводах возмущения возникают на входном участке трубы, в местах резкого изменения площади сечения трубопровода.

При обтекании тел смена режимов течения может происходить или непосредственно вблизи поверхности этих тел, или путем образования турбулентного следа уже за телом.

Иногда говорят, что турбулентное течение жидкости в отличие от ламинарного является вихревым. Действительно, турбулентное течение жидкости — всегда вихревое. Но и большинство ламинарных течений — тоже вихревые, т. е. индивидуальные частицы жидкости движутся в ламинарном потоке не только поступательно, но и вращаясь вокруг некоторой оси, проходящей через них, подобно тому как наша планета движется поступательно вокруг Солнца и одновременно участвует в суточном вращении вокруг земной оси.

Отметим особенности турбулентных течений.

1. Турбулентное движение жидкости можно представить суперпозицией вихрей различных размеров и завихренностей. Верхний предел размера вихрей определяется масштабом течения, т. е. размером устройства, в котором движется жидкость. Нижний предел зависит от вязкости жидкости и уменьшается с увеличением скорости осредненного потока. Внутри наименьших вихрей движение жидкости перестает быть турбулентным, и определяющую роль играет вязкость. В связи с этим следует иметь в виду, что минимальный масштаб вихрей должен быть макроскопическим. Это означает, что вихри минимального размера должны содержать достаточно большое число взаимодействующих между собой молекул. Известно, например, что при скорости воздушного потока до 100 м/с минимальный размер атмосферного вихря составляет около 10^{-3} м. Средняя длина свободного пробега молекул в воздухе при нормальных условиях составляет 10^{-7} м, что на четыре порядка меньше размера минимального вихря.

2. Физические величины, характеризующие турбулентное движение (скорость, давление, плотность, температура и т. д.), изменяются хаотически как во времени, так и в пространстве. Действительно, в любой момент времени индивидуальные частицы жидкости, находящиеся в разных точках, движутся с разными по величине и направлению скоростями. В любой фиксированной точке жидкости физические величины претерпевают хаотические изменения с течением времени.

3. Если ламинарное движение может быть как установившимся, так и неуставившимся, то турбулентное движение всегда неуставившееся, поскольку мгновенные скорости частиц жидкости в данной точке пространства все время изменяются как по направлению, так и по величине.

4. Турбулентное движение можно назвать квазипериодическим, поскольку через некоторый неопределенный промежуток времени в данной точке пространства скорость снова может принять прежнее мгновенное значение. В некоторый фиксированный момент времени весьма схожие картины течения повторяются более или менее регулярно в разных точках жидкости.

Если во всех областях поля течения турбулентность имеет качественно одну и ту же структуру, такую турбулентность называют *о д н о р о д н о й*. Пульсационные характеристики однородной турбулентности в среднем не зависят от координат. Если же пульсационные величины в среднем не зависят от направления, такую турбулентность называют *и з о т р о п н о й*. При изотропной турбулентности пульсации в различных точках течения в общем случае разные. Разумеется, изотропная турбулентность может быть и однородной, а однородная — изотропной.

Первые экспериментальные исследования ламинарно-турбулентного перехода провел О. Рейнольдс (1883). Опыты

заклю­ча­лись в сле­ду­ю­щем. В тру­бу с дви­жу­щей­ся жид­ко­стью вво­ди­лась тон­кая тру­боч­ка, из ко­то­рой в жид­кость по­сту­па­ло крас­я­щее ве­ще­ство.

При ма­лых ско­ро­стях дви­же­ния жид­ко­сти крас­ка рас­про­стра­ня­лась вдоль тру­бы в ви­де тон­ень­кой пря­мо­ли­ней­ной ни­точ­ки, про­сти­ра­ю­щей­ся от но­си­ка тру­бки с крас­я­щим ве­ще­ством до кон­ца ос­нов­ной тру­бы (рис. 3.20, а).



Рис. 3.20

При по­сте­пен­ном уве­ли­че­нии ско­ро­сти дви­же­ния жид­ко­сти на­сту­пает мо­мент, ко­гда струй­ка крас­я­ще­го ве­ще­ства на­чи­на­ет про­из­воль­но из­ги­бать­ся и за­тем раз­мы­вать­ся, ок­ра­ши­вая рав­но­мер­но всю жид­кость в тру­бе (рис. 3.20, б). Оче­вид­но, что до это­го мо­мен­та ча­сти­цы жид­ко­сти дви­га­лись па­рал­лель­но оси тру­бы, т. е. дви­же­ние име­ло сло­истый (ла­ми­нар­ный) ха­рак­тер, а при дос­ти­же­нии ско­ро­сти, ко­то­рая на­зы­ва­ет­ся *критичес­кой*, ла­ми­нар­ное те­че­ние жид­ко­сти пе­ре­хо­дит в тур­бу­лент­ное.

Рей­нольдс, про­во­дя опы­ты с раз­лич­ны­ми жид­ко­стями в тру­бах раз­лич­ных ди­аме­тров, ус­та­но­вил, что пе­ре­ход от ла­ми­нар­но­го дви­же­ния к тур­бу­лент­но­му на­сту­пает все­гда, ко­гда без­раз­мер­ная ве­ли­чи­на Re , на­зы­ва­е­мая *чис­лом Рей­нольдса*, дос­ти­гает не­ко­то­ро­го оп­ре­де­лен­но­го зна­че­ния. Критерий Re ха­рак­те­ри­зу­ет со­от­но­ше­ние ме­жду инер­ци­он­ны­ми си­ла­ми, дей­ст­вую­щи­ми в дви­жу­щей­ся жид­ко­сти, и си­ла­ми вяз­ко­сти. Оно оп­ре­де­ля­ет­ся сле­ду­ю­щим вы­ра­же­ни­ем:

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta} = \frac{v L}{\nu}, \quad \nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (3.30)$$

где ρ — плотность жидкости (или газа); v — скорость потока жидкости; L — характерный размер течения, например диаметр трубы или радиус шарика; η , ν — коэффициенты динамической и кинематической вязкости жидкости.

Следовательно, переход ламинарного движения жидкости в трубе в турбулентное происходит всегда при одном и том же числе Рейнольдса, называемом критическим числом Рейнольдса — $Re_{кр}$. Поэтому число Рейнольдса является управляющим параметром движения жидкости. При малых числах Re движение жидкости определяют силы внутреннего трения (вязкости), а при больших — инерционные силы. В первом случае течение жидкости будет ламинарным, а во втором — турбулентным.

Если не принимать специальных мер к сглаживанию условий входа жидкости в трубу, а также к устранению шероховатостей стенок трубы, то $Re_{кр} \approx 2\,300$. Если $Re < 2\,300$, то случайные возмущения, возникающие в потоке, будут затухать вниз по течению, и движение жидкости сохранит свой ламинарный характер. Если же $Re > 2\,300$, то возмущения, не передаваясь вверх по потоку, разрастаются вниз по течению жидкости. Путем сглаживания условий входа в трубу и устранения шероховатостей стенок трубы можно существенно сдвинуть переход ламинарного течения в турбулентное. В таких случаях можно наблюдать ламинарное движение при $Re = 60\,000$ и более.

Опыт показывает, что $Re_{кр} = 2\,300$ не является универсальным значением и характерно только для трубы круглого поперечного сечения. Так, в расширяющейся трубе $Re_{кр} < 2\,300$, в сужающейся трубе $Re_{кр} > 2\,300$.

При внешнем обтекании тел поток жидкости становится турбулентным при условии $Re > 1$. Например, при обтекании цилиндра плоскопараллельным потоком жидкости, перпендикулярным оси цилиндра, $Re_{кр} = 34$. Таким образом, для каждой геометрии течения имеется свое критическое число Рейнольдса.

3.13. Течение вязкой жидкости в трубе

Рассмотрим ламинарное течение жидкости в трубе круглого поперечного сечения радиуса R , вызванное перепадом давлений $p_2 - p_1$ на концах трубы. Кроме того, считаем течение установившимся. Это означает, что в любой точке сечения трубы скорость движения жидкости не изменяется с течением времени. Пусть l — длина трубы, причем $l \gg R$. В этом случае картина течения жидкости будет одинаковой в любом сечении трубы за исключением участков на входе в трубу и на выходе из нее.

Согласно условию «прилипания» скорость жидкости равна нулю на стенке трубы и максимальна на ее оси.

Тогда объем жидкости, проходящей за единицу времени через поперечное сечение трубы, как показывает расчет и подтверждает эксперимент, составляет

$$G_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (p_2 - p_1), \quad (3.31)$$

где η — коэффициент динамической вязкости жидкости; в единицах СИ $[G_V] = 1 \text{ м}^3/\text{с}$.

Формула (3.31) называется **формулой Пуазейля**. Согласно (3.31) объемный расход жидкости G_V обратно пропорционален ее вязкости и прямо пропорционален четвертой степени радиуса трубы.

Если необходимо знать массу жидкости, проходящей за единицу времени через поперечное сечение трубы, то объемный расход G_V нужно умножить на плотность жидкости ρ :

$$G_m = \rho G_V, \quad (3.32)$$

в единицах СИ $[G_m] = 1 \text{ кг/с}$.

Формула Пуазейля используется на практике не только для расчета расхода жидкости в трубе при фиксированном перепаде давлений на ее концах. Часто приходится решать обратную задачу — определять такой перепад давлений, который обеспечит необходимый расход жидкости.

3.14. Движение тел в жидкости

При движении тела в жидкости с некоторой скоростью \mathbf{v} на него со стороны жидкости действует сила \mathbf{F} (рис. 3.21). Возникновение такой силы может быть обусловлено двумя причинами. Первая связана с силой трения, действующей в пограничном слое. Вторая вызвана неравномерным распределением давления жидкости вдоль поверхности тела, имеющего несимметричную форму.

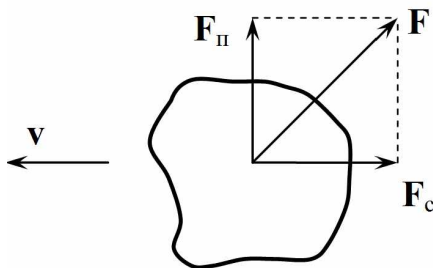


Рис. 3.21

Разложим действующую силу \mathbf{F} на две составляющие — силу \mathbf{F}_c , направленную противоположно скорости движения тела, и силу \mathbf{F}_n , направленную перпендикулярно этой скорости. Силу \mathbf{F}_c называют силой лобового сопротивления, а силу \mathbf{F}_n — подъемной силой. Если тело симметрично относительно направления движения, то на него действует только лобовое сопротивление, так как перпендикулярные направлению движения силы, действующие на симметричные части обтекаемого тела, будут взаимно скомпенсированы.

Вычисление силы сопротивления — задача достаточно сложная, и в общем случае она не решена. Аналитические решения удалось получить только для симметричных тел простой формы и только при малых числах Рейнольдса (Re).

Как показал расчет, при движении шарика радиуса r в жидкости, имеющей вязкость η , на него действует сила сопротивления, определяемая следующим выражением:

$$\mathbf{F} = -6\pi r\eta\mathbf{v}. \quad (3.33)$$

Формула (3.33) описывает силу сопротивления при медленном ($Re \ll 1$) обтекании шара вязкой несжимаемой жидкостью и называется **формулой Стокса**.

Формула Стокса имеет широкое применение. Она используется для измерения вязкости жидкостей по методу падающего шарика, при изучении движения мелких пылинок или капель жидкости в атмосфере, с ее помощью Р. Э. Милликен определил с высокой точностью величину заряда электрона.

При малых числах Рейнольдса аналогичную задачу можно решить для произвольного эллипсоида и диска. Так, для круглого диска радиуса r , расположенного перпендикулярно

и параллельно скорости набегающего потока, соответственно получено

$$F = 16r\eta v, \quad F = \frac{32}{3} r\eta v. \quad (3.34)$$

Контрольные вопросы

1. Что такое гидростатическое давление?
2. Что утверждает закон Паскаля?
3. Каково назначение гидравлического пресса?
4. Как определяется выталкивающая сила Архимеда, действующая на погруженное в жидкость тело? Чему равна эта сила в состоянии невесомости?
5. Сформулируйте условие плавания тела. Чему равен вес плавающего тела?
6. В чем состоит модель идеальной жидкости и каковы пределы ее применимости?
7. Что такое линия тока и траектория? При каком условии линия тока совпадает с траекторией?
8. Как строится трубка тока и в чем состоит ее основное свойство?
9. В чем состоит физический смысл уравнения неразрывности?
10. В чем состоит физический смысл уравнения Бернулли?
11. Как соотносятся между собой скорости течения жидкости в узкой и широкой частях трубы? А как соотносятся величины давления?
12. Что представляет собой явление кавитации?
13. Каково назначение трубки Пито?
14. В чем состоит эффект Магнуса?
15. Что такое условие «прилипания» вязкой жидкости?

16. Что характеризует число Рейнольдса?
17. В чем состоят особенности ламинарного и турбулентного течения вязкой жидкости?
18. Что такое критическое число Рейнольдса?
19. Что такое объемный и массовый расход жидкости в трубе? Как расход жидкости зависит от радиуса трубы?
20. Что такое сила лобового сопротивления и подъемная сила?

Примеры решения задач

Задача 3.1

Малый поршень гидравлического пресса за один ход опускается на $h_1 = 25$ см, а большой поднимается на $h_2 = 5$ мм. Какова сила давления \mathbf{F}_2 , действующая на большой поршень, если к малому поршню приложена сила $\mathbf{F}_1 = 20$ Н?

Решение

Из условия равенства давлений в цилиндрах гидравлического пресса следует формула (3.5), устанавливающая связь между силами, приложенными к поршням, и площадями этих поршней:

$$F_2 = F_1 \frac{S_2}{S_1}. \quad (3.35)$$

Под действием сил давления часть жидкости переходит из узкого цилиндра в широкий, заставляя широкий поршень подниматься. Поскольку жидкость несжимаема, то ее объем V_1 , вытесненный из узкого цилиндра, равен объему V_2 жидкости, поступающей в широкий цилиндр:

$$V_1 = V_2, \quad h_1 S_1 = h_2 S_2. \quad (3.36)$$

Отсюда формула (3.35) запишется в виде

$$F_2 = F_1 \frac{h_1}{h_2}, \quad F_2 = 200 \cdot \frac{0,25}{0,005} \text{ Н} = 10^4 \text{ Н}. \quad (3.37)$$

Таким образом, на большой поршень действует сила давления, равная 10^4 Н .

Задача 3.2

На какую глубину H погрузилась подводная лодка, если давление, испытываемое ею на этой глубине, в 11 раз больше атмосферного? Атмосферное давление (p_0) принять равным 750 мм рт. ст. Плотность морской воды $\rho = 1030 \text{ кг/м}^3$.

Решение

Полное давление на глубине H определяется суммой атмосферного давления и гидростатического давления столба воды:

$$p = p_0 + \rho g H. \quad (3.38)$$

Если это давление в n раз больше атмосферного, то $p = np_0$. Тогда получим:

$$np_0 = p_0 + \rho g H, \quad H = \frac{(n-1)p_0}{\rho g}, \quad H = 99 \text{ м}. \quad (3.39)$$

Подводная лодка опустилась на глубину 99 м.

Задача 3.3

Тело плавает в керосине, погружаясь на три четверти своего объема V . Чему равна плотность тела ρ ? Какая часть объема погрузится в воду? Плотность керосина $\rho_k = 800 \text{ кг/м}^3$, плотность воды $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$.

Решение

Запишем условие (3.9) плавания тела в керосине:

$$\rho V = \rho_k V_1, \quad \rho = \rho_k \frac{V_1}{V}, \quad (3.40)$$

где V_1 — часть объема тела, погруженного в керосин.

Аналогично записывается условие плавания тела в воде:

$$\rho V = \rho_{\text{в}} V_2, \quad \frac{V_2}{V} = \frac{\rho}{\rho_{\text{в}}}, \quad (3.41)$$

где V_2 — часть объема тела, погруженного в воду.

Подставляя числовые значения параметров из условия задачи, получим:

$$\rho = 600 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \frac{V_2}{V} = 0,6.$$

Задача 3.4

Канал шириной $d = 10$ м и глубиной $h = 5$ м наполнен водой и перегороден плотиной. С какой силой F вода давит на плотину? Плотность воды $\rho = 1\,000$ кг/м³. Атмосферным давлением следует пренебречь.

Решение

Давление жидкости на некоторой глубине x равно $p_x = \rho g x$. Значение x изменяется от нуля на поверхности воды до h на максимальной глубине. Поскольку гидростатическое давление изменяется по линейному закону с увеличением глубины, среднее значение давления равно среднему арифметическому давлений на поверхности воды и на дне канала:

$$p = \frac{1}{2} \rho g h.$$

По закону Паскаля p — средняя сила, действующая со стороны жидкости на единицу площади плотины. Тогда сила давления воды на всю плотину такова:

$$F = p d h = \frac{1}{2} \rho g h^2 d, \quad F = 1,25 \cdot 10^6 \text{ Н}. \quad (3.42)$$

Задача 3.5

На поршень шприца, имеющий площадь S_1 , действует постоянная сила \mathbf{F} . С какой скоростью \mathbf{v} должна вытекать в горизонтальном направлении струя из отверстия шприца площадью S_2 , если плотность жидкости равна ρ ?

Решение

Рассмотрим два способа решения этой задачи.

Первый способ

По условию задачи на поршень действует постоянная сила. Следовательно, поршень должен двигаться с некоторой постоянной скоростью u (рис. 3.22). Тогда за время τ поршень переместится на расстояние $u\tau$. При этом сила \mathbf{F} , приложенная к поршню, совершит работу $A = F u \tau$.

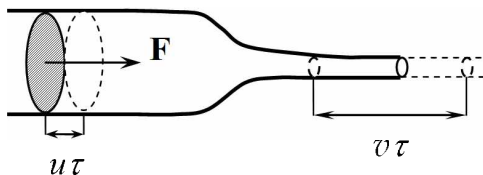


Рис. 3.22

Поскольку жидкость несжимаема, то ее масса $\rho S_1 u \tau$, перемещаемая за время τ движущимся поршнем, равна массе $\rho S_2 v \tau$ вытекающей жидкости за тот же промежуток времени. Изменение кинетической энергии жидкости составит

$$\rho S_1 u \tau \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right).$$

Согласно закону сохранения энергии работа силы \mathbf{F} равна изменению кинетической энергии жидкости:

$$F u \tau = \rho S_1 u \tau \left(\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right). \quad (3.43)$$

Из уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости имеем

$$S_1 u = S_2 v. \quad (3.44)$$

Исключая скорость поршня u , находим из уравнения (3.43) скорость истечения жидкости:

$$v = \sqrt{\frac{2FS_1}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}. \quad (3.45)$$

Если площадь выходного сечения мала, $S_2 \ll S_1$, то выражение для скорости упрощается:

$$v = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1}}. \quad (3.46)$$

Второй способ

В основе второго способа решения задачи лежит уравнение Бернулли.

Пусть p_0 — внешнее давление, например атмосферное. Тогда давление p_1 жидкости вблизи поршня определяется внешним давлением и давлением поршня на жидкость, а на выходе из шприца давление p_2 жидкости равно внешнему давлению среды, в которую жидкость вытекает:

$$p_1 = p_0 + \frac{F}{S_1}, \quad p_2 = p_0.$$

Рассмотрим линию тока в жидкости, проходящую вдоль всего шприца. Для двух точек этой линии тока, одна из которых находится вблизи поршня, а другая — на выходе из шприца, запишем уравнение Бернулли:

$$p_1 + \frac{\rho u^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v^2}{2}, \quad \frac{F}{S_1} + \frac{\rho u^2}{2} = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (3.47)$$

Используя уравнение неразрывности (3.44), выразим скорость поршня u через скорость v истечения жидкости:

$$u = v \frac{S_2}{S_1}.$$

При этом уравнение Бернулли (3.47) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v^2}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} \right)^2 = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (3.48)$$

Отсюда вновь получаем для скорости истечения жидкости формулу (3.45).

Задача 3.6

В сосуд, в дне которого имеется узкое отверстие, закрытое пробкой, налита вода до высоты $h = 1$ м (рис. 3.23). На поверхности воды находится поршень массой $m = 1$ кг и площадью $S = 100 \text{ см}^2$. Между поршнем и стенками сосуда вода не просачивается. Найдите скорость истечения воды из отверстия в дне сосуда сразу после того, как из отверстия будет вынута пробка. Трение не учитывать. Жидкость под поршнем считать неподвижной.

Решение

Пусть p_0 — атмосферное давление. Давление жидкости вблизи поршня на высоте h составит

$$p_0 + \frac{mg}{S}.$$

Второе слагаемое учитывает давление поршня на жидкость.

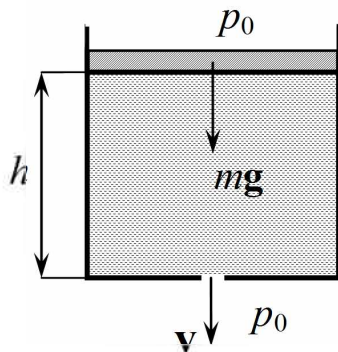


Рис. 3.23

По условию задачи предлагается пренебречь скоростью жидкости в сосуде по сравнению с ее скоростью на выходе из отверстия. Тогда уравнение Бернулли запишется в виде

$$p_0 + \frac{\rho v^2}{2} = p_0 + \rho gh + \frac{mg}{S}. \quad (3.49)$$

Отсюда определяем скорость истечения жидкости из сосуда:

$$v = \sqrt{2gh + \frac{2mg}{\rho S}}, \quad v = 4,9 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3.50)$$

Задача 3.7

Труба расположена горизонтально. Широкая часть трубы диаметром D закрыта подвижным поршнем, и на него действует постоянная сила F . Узкая часть трубы имеет диаметр d , и из нее вытекает струя воды. Найдите скорость перемещения поршня. Трение не учитывать.

Решение

Площади поперечного сечения широкой и узкой частей трубы таковы:

$$S_1 = \frac{\pi D^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Давление жидкости в широкой части трубы равно сумме атмосферного давления p_0 и давления поршня F/S_1 , а на выходе из узкой части трубы давление равно атмосферному p_0 .

Уравнение Бернулли для точек жидкости в широкой части трубы и на выходе из узкой ее части записывается в виде

$$\frac{F}{S_1} + p_0 + \frac{\rho u^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}, \quad (3.51)$$

где u и v — скорость движения поршня и скорость жидкости на выходе из трубы соответственно.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости:

$$S_1 u = S_2 v, \quad v = u \frac{S_1}{S_2}. \quad (3.52)$$

Из уравнения Бернулли (3.51) с учетом (3.52) получим

$$\frac{F}{S_1} = \frac{\rho u^2}{2} \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right). \quad (3.53)$$

Отсюда скорость движения поршня такова:

$$u = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1} \frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} = \sqrt{\frac{8F}{\rho \pi D^2} \frac{d^4}{D^4 - d^4}}. \quad (3.54)$$

Задача 3.8

В широкой части горизонтальной трубы вода течет со скоростью $v_1 = 8$ см/с при давлении $1,5 \cdot 10^5$ Па. В узкой части трубы давление равно $1,4 \cdot 10^5$ Па. Найдите скорость течения воды в узкой части трубы. Трение не учитывать. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

Решение

Индексами 1 и 2 будем обозначать величины, относящиеся к широкой и узкой частям трубы соответственно. Тогда уравнение Бернулли для точек несжимаемой жидкости в разных частях горизонтально расположенной трубы запишется в виде

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (3.55)$$

Отсюда скорость течения воды в узкой части трубы такова:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)}, \quad v_2 = 4,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (3.56)$$

Задача 3.9

Какой перепад давлений необходимо создать на концах трубы длиной $l = 50$ м, чтобы обеспечить объемный расход воды $G_V = 0,5 \text{ м}^3/\text{с}$? Проведите расчет для двух труб радиусами $R = 5$ см и $R = 3$ см. Коэффициент вязкости воды $\eta = 1 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$.

Решение

Из формулы Пуазейля (3.31) для перепада давлений имеем:

$$p_2 - p_1 = \frac{G_V 8 \eta l}{\pi R^4}. \quad (3.57)$$

Подставляя численные значения величин, для первой и второй трубы получим соответственно:

$$p_2 - p_1 = 1 \cdot 10^4 \text{ Па}, \quad p_2 - p_1 = 7,9 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Задача 3.10

Сколько времени потребуется для заполнения водой бассейна длиной $L = 25$ м, шириной $d = 8$ м и глубиной $h = 2$ м?

Вода поступает из трубы длиной $l = 50$ м и с внутренним радиусом $R = 5$ см. Насос создает на концах трубы перепад давлений, равный $1 \cdot 10^4$ Па. Коэффициент вязкости воды $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па \cdot с.

Решение

Объем воды, поступающей каждую секунду из трубы в бассейн, определяется формулой Пуазейля (3.31):

$$G_V = \frac{\pi R^4}{8\eta l} (p_2 - p_1). \quad (3.58)$$

Объем бассейна $V = Ldh$. Тогда время заполнения бассейна водой таково:

$$t = \frac{V}{G_V} = \frac{8\eta l L d h}{\pi R^4 (p_2 - p_1)}, \quad t = 800 \text{ с} \approx 13,3 \text{ мин.} \quad (3.59)$$

ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА. ТЕПЛООБМЕН

С поверхностей океанов, морей, озер и рек происходит непрерывное испарение воды в атмосферу, поэтому воздух всегда содержит водяной пар. Влажность воздуха, определяемая концентрацией водяного пара в нем, оказывает существенное влияние на жизнь растений, животных и человека, а также на сохранность строений. Особые требования к влажности воздуха предъявляются в помещениях фармацевтических производств и музеев. Шедевры скульптуры и живописи старых мастеров удастся сохранить посредством не только их периодической реставрации, но и создания особых условий в музейных помещениях.

Испаряются не только жидкости, но и твердые тела. Это обстоятельство необходимо учитывать при выборе строительных материалов. Пары отделочных материалов в жилых и производственных помещениях, попадая через органы дыхания в легкие человека, пагубно влияют на его здоровье. Поэтому в строительстве необходимо использовать хорошо проверенные экологически чистые материалы.

Микроклимат жилых и производственных помещений зависит не только от влажности воздуха, но и от его температуры. Поэтому при проектировании строений необходимо подбирать такие материалы, которые не промерзают и хорошо аккумулируют тепло. Это особенно важно для районов Урала и Сибири. Отдельный проект должен быть разработан для внутреннего

обогрева помещений в зависимости от их назначения (детские учреждения, больницы и т. д.).

4.1. Испарение и конденсация

Как известно, особенность строения жидкости состоит в том, что каждая молекула совершает колебания относительно временного положения равновесия, легко разрывает связи со своим окружением и переходит в новое положение равновесия. Время локализации молекулы в некоторой точке внутри жидкости значительно больше периода ее колебательного движения. Таким образом, каждая молекула мигрирует по всему объему жидкости и может оказаться на ее свободной поверхности.

Разные молекулы жидкости в общем случае имеют разные энергии. Если кинетическая энергия колебаний некоторой молекулы в поверхностном слое жидкости оказывается больше энергии связи с соседними молекулами, то эта молекула покидает жидкость и переходит в газ над ее свободной поверхностью. Процесс перехода молекул из жидкого состояния в газообразное, происходящий путем вылета молекул с открытой поверхности жидкости, называют *испарением*.

Совокупность молекул, испаренных из вещества, называют *паром* этого вещества.

Заметим, что испаряются не только жидкости, но и твердые тела. Например, интенсивно испаряются такие кристаллические вещества, как камфора, нафталин, йод. Испарение твердых тел называют *сублимацией* или *возгонкой*.

Чем выше температура жидкости, тем большее количество молекул обладает достаточной энергией для того, чтобы преодолеть силы притяжения со стороны ближайшего окружения и испариться. Следовательно, с увеличением температуры жидкос-

ти количество молекул, испаряющихся за единицу времени с единицы ее свободной поверхности, увеличивается. И наоборот, чем ниже температура жидкости, тем меньше интенсивность ее испарения.

Столкновения между молекулами пара изменяют их скорости. При этом часть молекул, движущихся в направлении поверхности жидкости, под действием сил притяжения может вновь поглотиться этой жидкостью.

Процесс перехода молекул из пара в жидкость, происходящий путем захвата этих молекул открытой поверхностью жидкости, называют **к о н д е н с а ц и е й**.

Таким образом, одновременно с процессом испарения происходит и обратный процесс — конденсация. Очевидно, чем выше давление пара, тем выше частота столкновений его молекул с поверхностным слоем жидкости и, следовательно, интенсивность конденсации — большее количество молекул пара захватывается жидкостью за единицу времени.

При испарении жидкость покидают молекулы, кинетическая энергия которых больше средней энергии теплового движения молекул в объеме жидкости. Поэтому средняя кинетическая энергия оставшихся молекул жидкости уменьшается. Отсюда следует, что при испарении жидкость охлаждается. Хорошо известно из повседневного опыта, что испарение воды с поверхности тела приводит к его охлаждению.

4.2. Насыщенный пар

Если жидкость находится в открытом сосуде, то в результате испарения ее количество будет уменьшаться. Чем выше температура жидкости, тем скорость испарения больше. Разумеется, одновременно с испарением происходит процесс конден-

сации. Но в случае открытого сосуда большая часть испарившихся молекул в результате хаотического движения удаляется от поверхности раздела жидкость — пар, и вероятность их возврата в жидкость мала. Поэтому процесс испарения жидкости превалирует над процессом конденсации. Если вдоль свободной поверхности жидкости направить поток воздуха, то этот поток будет уносить пар от жидкости, что приведет к снижению интенсивности конденсации и увеличит скорость испарения.

Совсем другая картина наблюдается, если жидкость находится в закрытом сосуде. При постоянной температуре часть жидкости превращается в пар, а в дальнейшем ее количество остается неизменным. Объясняется это тем, что при испарении плотность пара в закрытом сосуде над поверхностью жидкости увеличивается. Это приводит к росту интенсивности конденсации. Наконец, наступает такое состояние, при котором из жидкости испаряется столько же молекул, сколько конденсируется за то же время. Между паром и жидкостью устанавливается динамическое равновесие, при котором плотность пара над жидкостью становится постоянной.

Пар, находящийся в состоянии динамического равновесия со своей жидкостью, называют *насыщенным*. В противном случае пар называют *ненасыщенным*.

Давление p_n насыщенного пара зависит только от рода жидкости и ее температуры. Пусть при некоторой температуре T_1 жидкости пар является насыщенным и его давление равно p_{n1} . Если теперь температуру жидкости увеличить до значения T_2 , то сначала увеличится интенсивность испарения, и динамическое равновесие между жидкостью и ее паром будет нарушено в пользу испарения. Это приведет к росту плотности пара в закрытом сосуде над жидкостью. Возрастет интенсивность процесса конденсации. В конечном счете в сосуде вновь

установится состояние динамического равновесия между паром и жидкостью, но уже при давлении насыщенного пара $p_{н2}$, которое больше начального давления $p_{н1}$. Таким образом, с ростом температуры жидкости давление насыщенного пара в закрытом сосуде увеличивается.

На рис. 4.1 для сравнения показаны графики зависимости от температуры давления $p_{н}$ насыщенного пара и давления p идеального газа при постоянном объеме. Из графиков видно, что с увеличением температуры давление насыщенного пара растет значительно быстрее, чем давление идеального газа. Это обусловлено тем, что при увеличении температуры плотность пара растет, а плотность идеального газа при постоянном объеме остается неизменной.

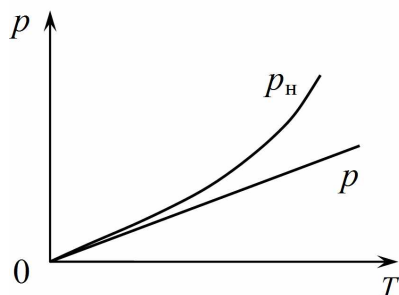


Рис. 4.1

Очевидно, давление насыщенного пара не зависит от объема пространства над свободной поверхностью жидкости в закрытом сосуде. Действительно, если при постоянной температуре этот объем, например, уменьшится, то это приведет к увеличению давления пара и, следовательно, к повышению интенсивности конденсации. Конденсация будет превышать испарение до тех пор, пока давление пара в сосуде не уменьшится до

начального значения, равного давлению насыщенного пара при данной температуре жидкости.

Получим формулу давления насыщенного пара, считая его идеальным газом. Как известно, состояние идеального газа описывается **уравнением Клапейрона — Менделеева**:

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad (4.1)$$

где V — объем пара; m — масса пара; M — молярная масса пара; R — молярная газовая постоянная [в СИ $R = kN_A = = 8,315 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$]; k — постоянная Больцмана; N_A — число Авогадро; T — абсолютная температура пара.

Поскольку $N = mN_A/M$ — полное число молекул пара в объеме V над поверхностью жидкости, то из уравнения (4.1) следует формула давления пара в сосуде:

$$p = nkT, \quad n = \frac{N}{V}, \quad (4.2)$$

где n — числовая плотность (концентрация) пара, т. е. число молекул пара в единице объема (в СИ $[n] = 1 \text{ м}^{-3}$).

Формально давление идеального газа также определяется выражением (4.2). Но числовая плотность n идеального газа в закрытом сосуде зависит только от объема этого сосуда и не зависит от температуры газа. В случае насыщенного пара, напротив, его плотность n зависит от температуры, но не зависит от объема сосуда.

4.3. Взаимные превращения пара и жидкости

Переход ненасыщенного пара в насыщенный, а далее насыщенного пара в жидкость, равно как обратный переход жидкости в насыщенный и ненасыщенный пары возможны либо при изменении объема пара, либо при изменении его температуры.

Первый из этих двух путей показан на рис. 4.2. График зависимости давления от объема при постоянной температуре называют *изотермой*. Участок AB изотермы соответствует ненасыщенному пару. При уменьшении объема ненасыщенного пара его давление возрастает до тех пор, пока пар не станет насыщенным (точка B). При дальнейшем уменьшении объема насыщенный пар конденсируется, превращаясь в жидкость, а его давление остается неизменным (участок BC изотермы). Точка C соответствует полному переходу насыщенного пара в жидкость. Если продолжать уменьшать объем, то давление начнет резко расти, так как жидкость почти несжимаема (участок CD).

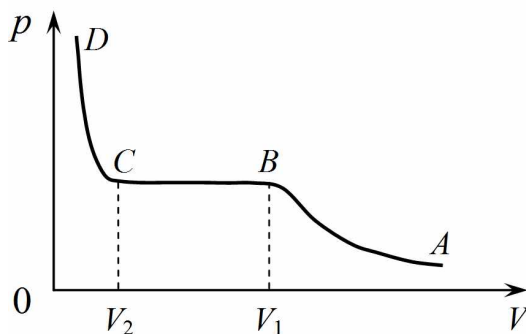


Рис. 4.2

Точно так же, но в обратной последовательности при увеличении объема жидкость превращается в насыщенный пар, который при дальнейшем увеличении объема становится ненасыщенным.

Превратить ненасыщенный пар в насыщенный можно и при постоянном объеме, уменьшая температуру пара. Если охлаждать ненасыщенный пар, то при некоторой температуре он становится насыщенным и превращается в жидкость.

В табл. 4.1 приведены значения плотности насыщенного водяного пара при различных температурах.

Таблица 4.1

$T, \text{ К}$	$\rho_{\text{н}}, 10^{-3} \text{ кг/м}^3$	$T, \text{ К}$	$\rho_{\text{н}}, 10^{-3} \text{ кг/м}^3$
263	2,14	283	9,40
264	2,33	284	10,00
265	2,54	285	10,70
266	2,76	286	11,40
267	2,99	287	12,10
268	3,24	288	12,80
269	3,51	289	13,60
270	3,81	290	14,50
271	4,13	291	15,40
272	4,47	292	16,30
273	4,84	293	17,30
274	5,20	294	18,30
275	5,60	295	19,40
276	6,00	296	20,60
277	6,40	297	21,80
278	6,80	298	23,00
279	7,30	299	24,40
280	7,80	300	25,80
281	8,30	301	27,20
282	8,80	302	28,70

4.4. Критическая температура

Напомним, что при повышении температуры увеличивается плотность насыщенного пара. При этом плотность жидкости уменьшается, а горизонтальный участок BC изотермы (см. рис. 4.2) сокращается. Наконец, при достаточно высокой температуре T_k плотности насыщенного пара и жидкости становятся одинаковыми, а горизонтальный участок BC изотермы стягивается в точку.

На рис. 4.3 показаны зависимости от температуры плотности насыщенного пара (нижняя кривая) и жидкости (верхняя кривая).

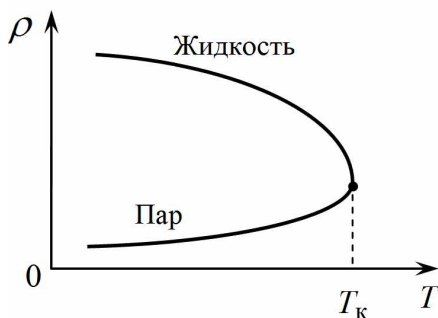


Рис. 4.3

При некоторой температуре T_k плотности пара и жидкости оказываются одинаковыми, и размывается физическая граница между жидкостью и ее паром.

Температура, при которой исчезают различия в физических свойствах между жидкостью и паром, находящимся с ней в динамическом равновесии, называют **к р и т и ч е с к о й** **т е м п е р а т у р о й** — T_k .

Каждое вещество имеет свою критическую температуру. Например, критическая температура воды 374 °С, кислорода — 118 °С, а углекислоты — 31 °С.

4.5. Влажность воздуха

Как было отмечено выше, в результате непрерывного испарения воды из рек и водоемов в атмосферном воздухе всегда содержится водяной пар. Содержание в воздухе водяного пара характеризуется показателем влажности воздуха.

Абсолютной влажностью ρ воздуха называют величину, численно равную массе водяного пара, содержащегося в 1 м³ воздуха. Другими словами, абсолютная влажность воздуха определяется парциальной плотностью водяного пара в воздухе при данных условиях.

Если пар ненасыщенный, то его состояние может быть описано уравнением Клапейрона — Менделеева (4.1). Из этого уравнения следует, что

$$p = \frac{m}{V} \frac{RT}{M} = \rho \frac{RT}{M}. \quad (4.3)$$

Таким образом, парциальное давление водяного пара пропорционально его плотности при неизменной температуре.

Парциальное давление водяного пара в воздухе называют *упругостью* водяного пара. Часто за абсолютную влажность воздуха принимают упругость водяного пара.

Знание абсолютной влажности или упругости водяного пара не дает представления о том, насколько водяной пар далек от насыщения в данных условиях. Поэтому кроме абсолютной влажности вводят понятие относительной влажности как величины, характеризующей, насколько водяной пар при данной температуре близок к состоянию насыщения.

Относительной влажностью воздуха φ называют выраженное в процентах отношение упругости водяного пара p , содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению p_n насыщенного пара при той же температуре:

$$\varphi = \frac{p}{p_n} \cdot 100 \%. \quad (4.4)$$

На основании пропорциональности между давлением и плотностью (4.3) относительную влажность можно определить следующей формулой:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_n} \cdot 100 \%, \quad (4.5)$$

где ρ — абсолютная влажность, а ρ_n — плотность насыщенного пара при данной температуре.

Таким образом, для вычисления относительной влажности воздуха при некоторой температуре надо знать абсолютную влажность воздуха и плотность насыщенного пара при этой температуре.

При охлаждении влажного воздуха при постоянном давлении его относительная влажность повышается, так как чем ниже температура, тем ближе упругость водяного пара к давлению насыщенного пара. В итоге пар становится насыщенным, а затем конденсируется в жидкость, образуя *росу*.

Температура t_r , при которой водяной пар становится насыщенным (при данной абсолютной влажности воздуха и неизменном давлении), называется *точкой росы*. При такой температуре относительная влажность воздуха равна 100 %.

Влажность воздуха и точку росы определяют экспериментально с помощью специальных приборов — *гигрометров* и *психрометров*.

4.6. Теплообмен

Теплообменом называют необратимый процесс переноса теплоты в неоднородно нагретой системе из более нагретой ее части в другую, менее нагретую. Обычно различают три механизма переноса тепла: теплопроводность, конвекцию и лучистый теплообмен. Первый механизм (теплопроводность) обусловлен непосредственной передачей энергии при взаимодействиях между частицами (молекулами, атомами, электронами), из которых состоит вещество. Когда частицы сталкиваются, энергия передается от частиц, обладающих большей энергией, частицам с меньшей энергией. Второй механизм (конвекция) связан с переносом энергии движущимся веществом и перемешиванием его. Наконец, третий механизм (лучистый теплообмен) обусловлен свойством любого вещества испускать и поглощать электромагнитное излучение. Любые тела, температура которых отлична от абсолютного нуля, испускают электромагнитное излучение — так называемое *тепловое излучение*. Чем выше температура тела, тем энергия его теплового излучения больше. Поэтому более нагретое тело тепловую энергию преимущественно излучает, а менее нагретое тело преимущественно ее поглощает. Лучистый теплообмен между телами будет происходить до тех пор, пока температуры этих тел не окажутся одинаковыми.

Относительный вклад каждого из этих трех механизмов в полный перенос тепла зависит от агрегатного состояния вещества, в котором осуществляется теплообмен. В твердом теле тепло передается, главным образом, за счет теплопроводности. Хотя при относительно высоких температурах (800 — 1 500 °С) может оказаться существенным и лучистый теплообмен, как это происходит в недрах Земли. В жидкостях и газах проявляются все механизмы переноса тепла. Какой из них будет

определяющим, зависит от конкретных условий и состояния жидкости или газа, в частности — от давления, температуры и степени ее неоднородности. Например, при высоких температурах и низких давлениях газа (вакуумные системы, космическое пространство) основную роль будет играть лучистый теплообмен, а при атмосферном давлении и относительно малом перепаде температур — теплопроводность газа.

Кратко обсудим каждый механизм переноса тепла.

4.7. Теплопроводность

Как уже было отмечено, теплопроводность вещества обусловлена передачей энергии при взаимодействиях между частицами (молекулами, атомами, электронами), из которых это вещество состоит. Но молекулярное строение газов, жидкостей и твердых тел различно. Следовательно, теплопроводность веществ, находящихся в различных агрегатных состояниях, имеет свои особенности. Поэтому есть смысл обсуждать теплопроводность отдельно — газов, отдельно — жидкостей и отдельно — твердых тел. Однако сначала мы обсудим общий закон теплопроводности, справедливый для веществ в любом агрегатном состоянии.

Закон теплопроводности Фурье

Рассмотрим слой вещества, заключенный между двумя параллельными пластинами, которые отстоят на расстоянии d одна от другой и имеют площадь S каждая (рис. 4.4). Предположим, что первоначально вещество находилось при одной и той же температуре T_0 , однородной по толщине слоя.

В некоторый момент времени температура одной из пластин по какой-то причине повысилась до значения T_1 . В дальнейшем

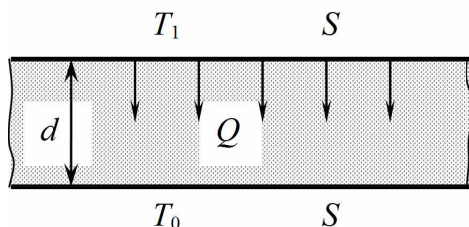


Рис. 4.4

температура одной пластины поддерживалась внешними источниками тепла при значении T_1 , а температура другой — при значении T_0 , так что разность температур поверхностей слоя вещества, прилегающих к пластинам, такова: $\Delta T = T_1 - T_0$. В стационарных условиях для поддержания этой разности температур требуется наличие постоянного теплового потока Q . Величина Q определяет количество тепловой энергии, которая переносится внутри слоя за единицу времени через любую поверхность, параллельную пластинам.

Единицей измерения теплового потока Q в СИ является *джоуль на секунду*, $[Q] = 1 \text{ Дж/с}$.

Экспериментально установлено, что при небольшой относительной разности температур ($\Delta T/T_0 \ll 1$) скорость переноса тепла через единицу поверхности любого слоя, параллельного пластинам, прямо пропорциональна перепаду температуры ΔT и обратно пропорциональна толщине d слоя вещества:

$$\frac{Q}{S} = \lambda \frac{\Delta T}{d}, \quad (4.6)$$

где параметр λ называют *коэффициентом теплопроводности*; его единицей измерения в СИ является $[\lambda] = 1 \text{ Дж}/(\text{с} \cdot \text{м} \cdot \text{К})$.

Уравнение (4.6) выражает **закон теплопроводности Фурье** для плоского слоя вещества.

Коэффициент теплопроводности зависит в общем случае от рода вещества, давления и температуры. На основе молекулярно-кинетической теории получены формулы для вычисления величины λ . На основе многочисленных экспериментальных исследований определены значения коэффициента теплопроводности для различных материалов. Результаты измерений представлены в справочных таблицах.

Для решения сложных задач теплопередачи полезно провести аналогию между законом теплопроводности Фурье и законом Ома для постоянного тока на участке цепи. Если считать, что тепловой поток аналогичен электрическому току, комплекс $d/(\lambda S)$ рассматривать как сопротивление, а разность температур — как аналог разности потенциалов, то выражение (4.6) можно записать в форме закона Ома:

$$Q = \frac{\Delta T}{R_c}, \quad R_c = \frac{d}{\lambda S}. \quad (4.7)$$

Величина R_c называется *термическим сопротивлением*, в СИ единицей его измерения служит *кельвин на ватт*, К/Вт. Обратная величина термического сопротивления, т. е. R_c^{-1} , называется *тепловой проводимостью*.

Теплопроводность разреженных газов

Газ называют разреженным, если средняя кинетическая энергия теплового движения молекул много больше средней потенциальной энергии взаимодействия между молекулами. В таком газе среднее время свободного пробега молекул много больше среднего времени столкновения между ними. Как показывает эксперимент, эта модель является хорошим приближением для давления газа около десяти атмосфер и ниже.

Для такой модели элементарная кинетическая теория газов, основанная на понятии средней длины свободного пробега молекул, дает следующее выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\lambda = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \bar{l} c_v, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2RT}{\pi M}}, \quad (4.8)$$

где ρ — плотность газа; \bar{v} — средняя скорость теплового движения молекул; \bar{l} — средняя длина свободного пробега молекул; c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; R — молярная газовая постоянная; T — абсолютная температура газа; M — молярная масса газа.

Выражение (4.8) лишь приближенно определяет значение коэффициента теплопроводности, но позволяет сделать важные качественные выводы относительно зависимости λ от давления и температуры газа.

Плотность ρ пропорциональна, а средняя длина свободного пробега \bar{l} — обратно пропорциональна давлению газа. Отсюда следует, что *коэффициент теплопроводности газа не зависит от давления*. Этот результат полностью подтверждается экспериментально при изменении давления газа в широких пределах, вплоть до 10^6 Па.

Из выражения (4.8) следует, что коэффициент теплопроводности, пропорциональный средней скорости теплового движения молекул, должен меняться с изменением температуры так же, как меняется \bar{v} , т. е. пропорционально квадратному корню из абсолютной температуры, $\lambda \sim \sqrt{T}$.

В действительности коэффициент теплопроводности, как показывает опыт, растет с температурой несколько быстрее, чем \sqrt{T} . Это объясняется тем, что средняя длина свободного пробега также растет с температурой.

В табл. 4.2 приведены значения коэффициента теплопроводности для некоторых газов.

Таблица 4.2

Газ	T, K	$\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Гелий	280	0,145
Неон	273	0,0464
Аргон	280	0,0167
Криптон	273	0,0089
Ксенон	273	0,0052
Воздух	280	0,0246
Кислород	280	0,0250
Азот	280	0,0244
Водород	280	0,172

Теплопроводность плотных газов и жидкостей

Простую теорию теплопроводности жидкости предложил в 1923 г. американский физик и философ П.У. Бриджмен. Согласно этой теории каждая молекула жидкости занимает свою кубическую ячейку. Если V — объем жидкости, а N — число молекул в этом объеме, то объем одной молекулярной ячейки равен V/N . Кроме того, делается предположение, что перенос энергии между ячейками происходит со скоростью звука v_s , характерной для данной жидкости. В принятом приближении для коэффициента теплопроводности жидкости получено следующее выражение:

$$\lambda = 2,80 \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} k v_s, \quad (4.9)$$

где k — постоянная Больцмана.

Уравнение (4.9) хорошо описывает существующие опытные данные для любых жидкостей.

В табл. 4.3 приведены значения коэффициента теплопроводности для некоторых жидкостей.

Таблица 4.3

Жидкость	T , К	λ , Вт/(м · К)
Вода	283	0,588
Ацетон	273	0,174
Глицерин	298	0,279
Диэтиловый эфир	273	0,143
Этиловый спирт	290	0,171
Уксусная кислота	298	0,171

При повышении температуры теплопроводность большинства жидкостей уменьшается, исключение составляют вода и глицерин. Зависимостью коэффициента теплопроводности жидкостей от давления обычно пренебрегают, хотя немногочисленные экспериментальные исследования показывают, что при повышении давления λ слабо возрастает.

Теплопроводность твердых тел

Единой теории теплопроводности твердого тела в настоящее время не существует. Это связано с разнообразием как молекулярного, так и структурного строения твердых тел. Так, например, теплопроводность кристаллических веществ существенно зависит от природы кристаллической решетки. Теплопроводность пористых материалов сильно зависит от объемной доли

пустот, от размера пор, а также от физических свойств газа или жидкости, заполняющих поры.

Металлы, как правило, являются более хорошими проводниками тепла, чем неметаллы, а кристаллические материалы проводят тепло лучше, чем материалы аморфные.

В металлах основным переносчиком теплоты являются свободные электроны, которые можно моделировать как идеальный газ. Кроме того, существует механизм переноса тепла в металлах за счет передачи колебательной энергии узлов кристаллической решетки. Однако в металлах вклад решеточной теплопроводности много меньше вклада электронного переноса тепла. Носителями электрической энергии в металлах также являются свободные электроны, поэтому между тепловыми и электрическими явлениями существует определенная связь.

В случае чистых металлов между коэффициентами теплопроводности λ и электропроводности λ_e существует следующая приближенная зависимость:

$$\frac{\lambda}{\lambda_e T} = L = \text{const}, \quad (4.10)$$

где T — абсолютная температура металла, а величина L носит название *числа Лоренца*. При температуре 273 К величина L составляет приблизительно $(22 \div 29) \cdot 10^{-9} \text{ В}^2/\text{К}^2$.

Соотношение (4.10) известно как **уравнение Видемана — Франца**. Оно имеет ограниченную область применения в случае сплавов, так как число L зависит от состава, а иногда и от температуры. Зато это уравнение хорошо описывает опытные данные для чистых металлов.

В табл. 4.4 приведены значения коэффициента теплопроводности для некоторых материалов.

Таблица 4.4

Материал	T, K	$\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot K)$	$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$
Алюминий	300	204	2700
Медь	300	386	8900
Углеродистая сталь	300	54	7800
Железобетон набивной	273	1,55	2200
Шлакобетон	273	0,70	1500
Вата хлопчатобумажная	303	0,042	80
Гипс сухой	293	0,43	1250
Гравий	293	0,36	1840
Дерево (сосна)	273–323	0,14–0,16	546
Кирпич силикатный	273	0,81	1900
Мрамор	273	3,5	2800
Стекло обыкновенное	293	0,74	2500
Штукатурка цементно-песчаная	273	1,2	1800

При повышении температуры возрастает интенсивность хаотического движения свободных электронов в металле. Это влечет уменьшение его коэффициента теплопроводности. В отличие от чистых металлов, как показывают эксперименты, теплопроводность сплавов при повышении температуры возрастает.

Теплопроводность диэлектриков зависит от плотности материала, его структуры, пористости и влажности. Многие строительные и теплоизоляционные материалы имеют пористое строение (кирпич, бетон, асбест, шлак и др.), поэтому их нельзя

рассматривать как однородную среду. Применение закона теплопроводности Фурье к таким неоднородным телам является в известной мере условным, в связи с чем вводят понятие *эффективный коэффициент теплопроводности*.

Коэффициент теплопроводности порошкообразных и пористых тел сильно зависит от их плотности ρ . Например, при возрастании величины ρ от 400 до 800 кг/м³ коэффициент теплопроводности асбеста увеличивается от 0,105 до 0,248 Вт/(м · К). Это объясняется тем, что теплопроводность заполняющего поры воздуха значительно меньше теплопроводности твердого компонента пористого материала.

Эффективный коэффициент теплопроводности пористых материалов сильно зависит также от влажности. Для влажного материала коэффициент теплопроводности значительно больше, чем для сухого материала и воды в отдельности. Например, для сухого кирпича $\lambda = 0,35$ Вт/(м · К), для воды $\lambda = 0,60$ Вт/(м · К), а для влажного кирпича $\lambda = 1,0$ Вт/(м · К), что объясняется конвективным переносом тепла (подробно этот механизм обсуждается в следующем параграфе), возникающим благодаря капиллярному движению воды внутри пористого материала.

Коэффициенты теплопроводности строительных и теплоизоляционных материалов имеют значения, лежащие в пределах от 0,023 до 2,9 Вт/(м · К). Материалы с коэффициентом теплопроводности меньше 0,25 Вт/(м · К), обычно применяемые для тепловой изоляции, называются т е п л о и з о л я ц и о н н ы м и.

4.8. Конвективный теплообмен. Теплоотдача

Процесс теплопроводности в неподвижной среде в чистом виде может наблюдаться только в твердых телах, так как в

жидкостях и газах на этот процесс неизбежно накладывается движение среды как целого — *свободная* и *вынужденная конвекция*. В первом случае движение жидкости (или газа) обусловлено различием плотностей нагретых и охлажденных частей жидкости (или газа), а во втором — работой внешних сил. Таким образом, конвекцией тепла называют процесс его переноса за счет движения среды из области с одной температурой в область с другой температурой.

Конвекция тепла всегда сопровождается теплопроводностью, так как температура жидкости или газа неоднородна; при этом результирующий поток тепла всегда направлен в сторону меньшей температуры.

Конвективный теплообмен между потоком жидкости (или газа), имеющей температуру T , и поверхностью твердого тела, температура которой T_s , называют *теплоотдачей*.

При инженерных расчетах для определения скорости теплоотдачи Q (Q — тепловая энергия, отдаваемая за 1 с от стенки к жидкости или от жидкости к стенке; единицей измерения величины Q в СИ является Вт) используют **закон Ньютона — Рихмана**:

$$Q = \alpha(T_s - T)S, \quad (4.11)$$

где α — коэффициент теплоотдачи; S — площадь поверхности твердого тела.

Разность температур $\Delta T = T_s - T$ стенки и жидкости (или газа) называют *температурным напором*.

Единицей измерения коэффициента теплоотдачи в СИ является

$$[\alpha] = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}.$$

В общем случае величина α зависит от формы и размеров обтекаемого тела, режима движения жидкости или газа (ламинарного или турбулентного), их скорости и температуры. Важное значение имеет также природа возникновения движения среды.

Конвективный теплообмен можно рассматривать по аналогии с законом Ома для постоянного тока. Исходя из соотношения (4.11) определим термическое сопротивление для конвективного переноса тепла формулой

$$R_c = \frac{1}{\alpha S}. \quad (4.12)$$

4.9. Вынужденная конвекция

Если движение жидкости или газа (среды) обусловлено работой внешних сил, то связанная с этим движением тепловая конвекция называется вынужденной. Например, конвекция будет вынужденной, если движение неоднородно нагретой среды в трубе создается насосом или компрессором, а также если поток воздуха создается вентилятором.

Интенсивность тепловой конвекции может изменяться с течением времени. Мы обсудим только стационарные процессы движения среды и теплопереноса, при которых скорость и температура в любой точке среды не изменяются с течением времени.

В качестве примера рассмотрим стационарное ламинарное движение среды в трубе круглого поперечного сечения диаметром D (рис. 4.5). Стенка трубы имеет нагретый участок длиной L , причем температура T_s внутренней поверхности этого участка изменяется вдоль оси трубы. Среда движется за счет внешней силы в направлении оси z .

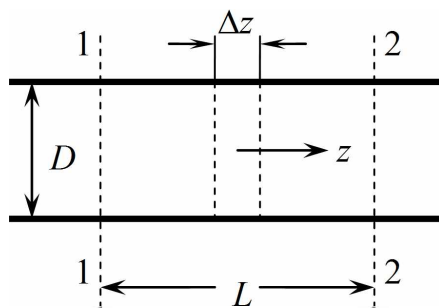


Рис. 4.5

В любом сечении температура среды на стенке и температура среды на оси трубы различаются. Пусть T_{b1} и T_{b2} — средние по сечению трубы температуры среды на входе (сечение 1—1) и выходе (сечение 2—2) нагретого участка соответственно. Для определенности примем, что температура возрастает вниз по течению среды, т. е. $T_{b2} > T_{b1}$.

Задача теории теплообмена — расчет коэффициента теплоотдачи. Основная трудность ее решения в нашем случае состоит в том, что температуры среды и стенки изменяются вдоль трубы, а следовательно, изменяется и коэффициент теплоотдачи. В связи с этим вводят понятие *локального коэффициента теплоотдачи* $\alpha(z)$, характеризующего интенсивность теплообмена между средой и стенкой в сечении трубы с координатой z .

Мысленно выделим элемент трубы малой толщины Δz , причем $\Delta z \ll L$. Объем этого цилиндрического элемента равен $\pi D^2/4) \Delta z$, а площадь его боковой поверхности на стенке — $\pi D \Delta z$. Пусть T_b и ΔT_b — средняя по выделенному элементу объема температура среды и перепад средних температур среды на торцевых поверхностях этого элемента соответственно. Тогда закон Ньютона — Рихмана (4.11) для рассматриваемого элемента объема среды запишется в виде

$$\Delta Q_s = \alpha(z)(T_s - T_b)\pi D \Delta z. \quad (4.13)$$

Здесь величина ΔQ_s определяет количество теплоты, которая за одну секунду поступает в движущуюся среду через боковую поверхность трубы ширины Δz за счет теплоотдачи от стенки.

Из термодинамики известно, что для изменения температуры среды массой m на величину ΔT необходимо сообщить среде количество теплоты, равное $c_p m \Delta T$ (c_p — удельная теплоемкость среды при постоянном давлении). Масса среды, проходящая за единицу времени со скоростью v через поперечное сечение трубы (массовый расход), составляет $G_m = \rho v \pi D^2/4$ (ρ — плотность среды). Продвинувшись на малое расстояние Δz , среда изменила свою температуру на величину ΔT_b . Следовательно, количество теплоты ΔQ_b , поступившее за единицу времени в рассматриваемый элемент объема среды за счет вынужденной конвекции, таково:

$$\Delta Q_b = c_p G_m \Delta T_b = c_p \rho v \frac{\pi D^2}{4} \Delta T_b. \quad (4.14)$$

Температура движущейся среды возрастает на величину ΔT_b вниз по течению благодаря притоку тепла за счет теплоотдачи с кольцевого элемента стенки шириной Δz . Поэтому тепловой баланс рассматриваемого элемента объема среды, если пренебрегать ее теплопроводностью вдоль оси трубы, состоит в равенстве потоков тепла: $\Delta Q_s = \Delta Q_b$. Из уравнений (4.13) и (4.14) получим:

$$\alpha(z) = \frac{c_p G_m}{(T_s - T_b)\pi D} \frac{\Delta T_b}{\Delta z} = \frac{c_p \rho v D}{4(T_s - T_b)} \frac{\Delta T_b}{\Delta z}. \quad (4.15)$$

Уравнение (4.15) позволяет рассчитать локальный коэффициент теплоотдачи лишь при условии, что известны распреде-

ления температур стенки T_s и среды T_b вдоль оси трубы. Как правило, зависимости $T_s(z)$ и $T_b(z)$ определяются экспериментально.

При относительно небольшом перепаде температур на участке трубы длиной L в инженерных расчетах обычно вводят средний коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$. Делается это следующим образом. Количество теплоты, которая за одну секунду поступает в движущуюся среду через боковую поверхность всего нагретого участка трубы за счет теплоотдачи от стенки, определяется как

$$Q_s = \bar{\alpha}(\bar{T}_s - \bar{T}_b)\pi DL, \quad (4.16)$$

$$\bar{T}_s = \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}, \quad \bar{T}_b = \frac{T_{b1} + T_{b2}}{2},$$

где T_{s1} и T_{s2} — температуры стенки в сечениях 1 и 2 соответственно; \bar{T}_s и \bar{T}_b — средние арифметические температуры стенки и среды.

Количество теплоты Q_b , поступившее за единицу времени в жидкость (или газ) за счет вынужденной конвекции на всем нагретом участке трубы, при неизменных вдоль оси трубы удельной теплоемкости c_p и массовом расходе G_m составит:

$$Q_b = c_p G_m (T_{b2} - T_{b1}) = c_p \rho v \frac{\pi D^2}{4} (T_{b2} - T_{b1}). \quad (4.17)$$

Тепловой баланс предполагает равенство тепловых потоков: $Q_s = Q_b$. Из уравнений (4.16) и (4.17) для среднего коэффициента теплоотдачи получим следующее выражение:

$$\bar{\alpha}_c = \frac{c_p G_m (T_{b2} - T_{b1})}{(\bar{T}_s - \bar{T}_b)\pi DL} = \frac{c_p \rho v D (T_{b2} - T_{b1})}{4L(\bar{T}_s - \bar{T}_b)}. \quad (4.18)$$

Здесь нижний индекс s у коэффициента теплоотдачи поставлен для напоминания о том, что теплоотдача связана с конвекцией.

Средний коэффициент теплоотдачи можно выразить через перепад давлений на концах трубы, если для массового потока среды G_m воспользоваться формулой Пуазейля (3.31).

4.10. Свободная конвекция

Как было отмечено выше, свободная, или естественная, конвекция жидкости или газа (среды) обусловлена различием плотностей нагретых и охлажденных их частей. Неоднородность плотности изначально неподвижной среды связана с неоднородностью ее температуры. Очевидно, свободное движение может проявиться в среде с неоднородной плотностью только при наличии внешней массовой силы⁵, например силы тяжести или центробежной силы. В отличие от вынужденной конвекции, при которой скорость среды определяется внешними силами, при свободной конвекции движение среды возникает под действием подъемных (архимедовых) сил, которые связаны с изменением температуры и плотности в самой среде. Движение среды под действием подъемных сил может быть как ламинарным, так и турбулентным. При свободной конвекции скорость среды равна нулю не только на граничной поверхности твердого тела вследствие условия «прилипания», но и на достаточно большом удалении от тела вследствие диссипации (рассеяния) механической энергии среды за счет работы сил внутреннего трения (вязкости). Движение среды может быть направлено

⁵ Действующая на тело сила называется массовой, если она пропорциональна массе этого тела.

вверх (против силы тяжести), как в случае нагрева воздуха от горячей пластины, или вниз, как в случае, когда холодное тело опущено в неподвижную теплую воду.

Теплоотдача при свободной конвекции, как и в случае вынужденной конвекции, описывается законом Ньютона — Рихмана (4.11). При этом коэффициент теплоотдачи $\bar{\alpha}$ рассматривается как средний по всей поверхности погруженного в жидкость или газ тела. Если T_s — температура стенки, а T_∞ — температура неподвижной среды вдали от тела, то закон Ньютона — Рихмана применительно к свободной конвекции запишется в следующем виде:

$$Q = \bar{\alpha}_c(T_s - T_\infty)S, \quad (4.19)$$

где S — площадь поверхности погруженного в жидкость (или газ) тела.

Кроме того, все физические величины, характеризующие среду, относят к среднеарифметической температуре:

$$T_a = \frac{1}{2}(T_s + T_\infty).$$

Из выражения (4.19) определим среднее тепловое сопротивление при свободной конвекции следующей формулой:

$$R_c = \frac{1}{\bar{\alpha}_c S}. \quad (4.20)$$

Рассмотрим природу возникновения подъемной силы, действующей на нагретую часть жидкости (или газа) и стимулирующей свободную конвекцию. Пусть нагретое тело помещено в холодную среду. Плотность невозмущенной среды, имеющей температуру T_∞ , вдали от тела равна ρ_∞ , а плотность ρ при некоторой температуре T задается выражением (2.16). Разность

плотностей можно выразить через коэффициент объемного теплового расширения среды, который по определению таков:

$$\beta = \frac{\rho_{\infty} - \rho}{\rho(T - T_{\infty})}. \quad (4.21)$$

На единичный объем среды, имеющей температуру T , действует сила тяжести ρg , где g — величина ускорения свободного падения. Кроме того, на него действует выталкивающая сила Архимеда $\rho_{\infty} g$, равная весу вытесненной среды, имеющей температуру T_{∞} . Так как $\rho < \rho_{\infty}$, на рассматриваемый единичный объем среды действует результирующая подъемная сила, равная $(\rho_{\infty} - \rho)g$. Используя разность плотностей из выражения (4.21), для подъемной силы, действующей на единицу объема среды вблизи нагретого тела, получим $\rho g \beta (T_s - T_{\infty})$. Отсюда следует, что подъемная сила зависит от переменных ρ , g , β и $(T_s - T_{\infty})$. Помимо этих четырех переменных скорость конвективного движения среды зависит от характерного размера тела L , а также от таких физических свойств среды, как вязкость η , теплопроводность λ и удельная теплоемкость c_p при постоянном давлении. Из этих величин можно составить три независимых безразмерных критерия, определяющих свободную конвекцию:

число Нуссельта	$Nu = \frac{\bar{\alpha}_c L}{\lambda},$	
число Прандтля	$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda},$	(4.22)
число Грасгофа	$Gr = \frac{\beta g \rho^2 (T_s - T_{\infty}) L^3}{\eta^2}.$	

Физический смысл числа Нуссельта легко понять, разделив поток тепла за счет теплоотдачи по закону Ньютона — Рихмана (4.19) на поток тепла за счет теплопроводности по закону Фурье (4.6). При этом для числа Nu получим выражение (4.22). Следовательно, число Нуссельта характеризует соотношение между

теплоотдачей при конвекции и переносом тепла теплопроводностью среды.

Число Прандтля устанавливает связь между вязкостью и теплопроводностью среды. В частности, из молекулярно-кинетической теории разреженных газов следует, что

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\lambda} = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad (4.23)$$

где c_p и c_v — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и объеме соответственно.

Например, для одноатомного газа $\gamma = 5/3$ и $Pr = 2/3$, а для воздуха $\gamma = 1,4$ и $Pr = 0,74$.

Число Грасгофа определяется как отношение подъемной силы, действующей на неоднородно нагретую среду, к силе внутреннего трения (вязкости) в движущейся среде. В случае малой неоднородности температуры среды сила вязкости подавляет подъемную силу, число Грасгофа мало ($Gr \ll 1$), и свободной конвекцией можно пренебречь. Если же температура среды сильно неоднородна, подъемная сила может существенно превосходить силу вязкости, число Грасгофа станет велико ($Gr \gg 1$), и свободная конвекция будет определяющим механизмом теплообмена.

На основе многочисленных экспериментальных данных было установлено, что при свободной конвекции среднее число Нуссельта можно связать с числами Грасгофа и Прандтля соотношением

$$Nu_a = C(Gr_a \cdot Pr_a)^n. \quad (4.24)$$

Здесь C и n — неизвестные постоянные, которые определяются экспериментально в зависимости от формы находящихся в среде тел, их ориентации относительно направления силы

тяжести, а также от значения произведения чисел Грасгофа и Прандтля. Численные значения этих постоянных при разных величинах ($Gr_a \cdot Pr_a$) для некоторых систем приведены в табл. 4.5. Индекс a указывает на то, что все физические величины следует относить к среднеарифметической температуре $T_a = (T_s + T_\infty)/2$.

Таблица 4.5

Форма тела	$Gr_a Pr_a$	C	n
Вертикальные пластины	$10^4 - 10^9$	0,59	1/4
и вертикальные цилиндры	$10^9 - 10^{13}$	0,10	1/3
Горизонтальные цилиндры	$0 - 10^{-5}$	0,4	0
	$10^4 - 10^9$	0,53	1/4
	$10^9 - 10^{12}$	0,13	1/3
Верхняя поверхность нагретых пластин или	$2 \cdot 10^4 - 8 \cdot 10^6$	0,54	1/4
нижняя поверхность охлажденных пластин	$8 \cdot 10^6 - 10^{11}$	0,15	1/3
Нижняя поверхность нагретых пластин или	$10^5 - 10^{11}$	0,58	1/5
верхняя поверхность охлажденных пластин			

В табл. 4.6 представлены приближенные значения коэффициента конвективной теплоотдачи.

Таблица 4.6

Вид конвекции и среда	$\bar{\alpha}$, Вт/(м ² · К)
Свободная конвекция, воздух	5 – 25
Свободная конвекция, вода	20 – 100
Вынужденная конвекция, воздух	10 – 200
Вынужденная конвекция, вода	50 – 10 000
Кипящая вода	3 000 – 100 000
Конденсирующийся водяной пар	5 000 – 100 000

4.11. Лучистый теплообмен

Тепловое излучение — это электромагнитное излучение, испускаемое веществом и возникающее за счет его внутренней энергии.

Напомним, что электромагнитным излучением называют процесс распространения электромагнитных колебаний в пространстве с течением времени. В соответствии со специальной теорией относительности (А. Эйнштейн, 1905) скорость этого процесса (c) является абсолютной величиной, т. е. величиной, не зависящей от выбора инерциальной системы отсчета, и в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Всякое нагретое тело испускает тепловое излучение. Природа этого явления состоит в следующем. Из теории электромагнетизма, развитой выдающимся английским физиком Д. К. Максвеллом, известно, что ускоренное движение электрически заряженных частиц порождает переменное магнитное поле. Изменяющееся со временем магнитное поле является причиной возникновения вихревого электрического поля, которое в свою очередь вновь порождает переменное магнитное поле.

Далее все повторяется в той же последовательности. Так происходит распространение электромагнитных волн в пространстве. Тепловое излучение возникает в веществе за счет ускоренного движения заряженных частиц, из которых это вещество состоит. Причиной может быть, например, колебательное движение атомов или ионов, столкновение свободных электронов в металлах и т. д. Поскольку разные частицы-излучатели колеблются с разными частотами, излучение тела содержит электромагнитные волны всевозможных частот. Задача о распределении энергии излучения между волнами различной частоты, т. е. о спектральном составе излучения, сыграла решающую роль в возникновении квантовой механики (немецкий физик М. Планк, 1900).

Полная тепловая энергия, излучаемая за единицу времени с единицы поверхности тела, определяется **законом Стефана — Больцмана**

$$Q = \varepsilon \sigma S T^4, \quad (4.25)$$

где ε — излучательная способность (степень черноты)⁶ серой поверхности, равная отношению потока излучения серой поверхности к потоку излучения идеального излучателя при той же самой температуре; $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ — постоянная Стефана — Больцмана; S — площадь излучающей поверхности.

Таким образом, согласно закону Стефана — Больцмана поток теплового излучения пропорционален четвертой степени абсолютной температуры.

⁶ Поверхность называют абсолютно черной, если она поглощает все падающее на нее излучение. Например, это условие реализуется в состоянии теплового равновесия между телом и окружающим его веществом.

Если T_s — температура поверхности тела, а T_∞ — температура омывающих его жидкости или газа, то результирующий поток теплового излучения определяется соотношением

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon \sigma S (T_s^4 - T_\infty^4) = \\ &= \varepsilon \sigma S (T_s^2 + T_\infty^2)(T_s + T_\infty)(T_s - T_\infty). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Исходя из выражения (4.26) определим тепловое сопротивление при лучистом теплообмене следующей формулой:

$$R_r = \frac{1}{\varepsilon \sigma S (T_s^2 + T_\infty^2)(T_s + T_\infty)}. \quad (4.27)$$

Нижний индекс r поставлен в формуле (4.27) для напоминания о том, что теплоотдача связана с излучением.

При условии, что излучение — единственный вид переноса тепла, поток теплового излучения (4.26) следует приравнять к энергии теплоотдачи по закону Ньютона — Рихмана (4.19). Отсюда для среднего по поверхности коэффициента теплоотдачи получим следующее выражение:

$$\bar{\alpha}_r = \frac{\varepsilon \sigma (T_s^4 - T_\infty^4)}{T_s - T_\infty} = \varepsilon \sigma (T_s^2 + T_\infty^2)(T_s + T_\infty) = \frac{1}{R_r S}. \quad (4.28)$$

Значения коэффициента ε в зависимости от рода материала тела, состояния его поверхности и температуры определяют экспериментально.

В табл. 4.7 приведены экспериментальные значения излучательной способности ε для некоторых материалов.

4.12. Сложный теплообмен

Сложный теплообмен представляет собой совокупность одновременно протекающих процессов теплопроводности, конвективного переноса тепла и теплового излучения.

Таблица 4.7

Материал	$T, \text{ К}$	ε
Алюминий полированный	373	0,095
Алюминий окисленный	373	0,35
Медь полированная	373	0,02
Стекло	303	0,94
Белая краска	303	0,90
Вода	303	0,95

Например, теплообмен через слой воздуха осуществляется как за счет теплопроводности и конвекции, так и за счет излучения. Сложный перенос тепла имеет место также в пористых изоляционных материалах, в которых поры заполнены воздухом или жидкостью.

Различные виды переноса тепла возникают обычно в системах, состоящих из ряда последовательно соединенных элементов. В качестве примера на рис. 4.6 показана система, включающая жидкость (область слева), плоский слой твердого тела толщиной L (в центре) и газ (область справа).

Пусть $T_{\text{ж}}$ и $T_{\text{г}}$ — температуры жидкости и газа вдали от твердого тела, T_{s1} и T_{s2} — температуры поверхностей плоской стенки со стороны жидкости и газа соответственно, S — площадь поверхности твердого тела, контактирующей с жидкостью или газом.

В первом элементе (жидкости) тепло переносится от горячей среды к левой стенке твердого слоя посредством конвекции и теплопроводности, действующими совместно. Суммарный тепловой поток к поверхности второго элемента (плоская стенка)

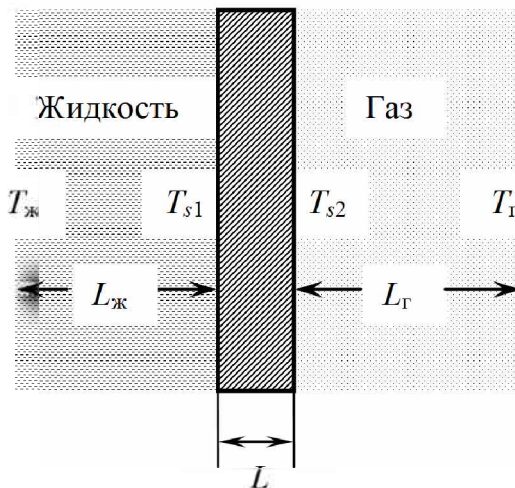


Рис. 4.6

определяется выражением

$$Q_1 = \bar{\alpha}_{c1} S (T_{\text{ж}} - T_{s1}) + \frac{\lambda_{\text{ж}} S}{L_{\text{ж}}} (T_{\text{ж}} - T_{s1}) = \frac{(T_{\text{ж}} - T_{s1})}{R_1}, \quad (4.29)$$

где $\bar{\alpha}_{c1}$ — коэффициент теплоотдачи в подсистеме жидкость — стенка; $\lambda_{\text{ж}}$ — коэффициент теплопроводности жидкости; $L_{\text{ж}}$ — расстояние от левой стенки твердого тела до стенки сосуда, в котором жидкость находится; $R_1 = 1/[S(\bar{\alpha}_{c1} + \lambda_{\text{ж}}/L_{\text{ж}})]$ — термическое сопротивление первого элемента системы.

Тепловой поток через плоский слой твердого тела обусловлен его теплопроводностью. Причем в стационарных условиях он равен тепловому потоку, поступающему в стенку от жидкости:

$$Q_2 = \frac{\lambda_s S}{L} (T_{s1} - T_{s2}) = \frac{(T_{s1} - T_{s2})}{R_2} = Q_1, \quad R_2 = \frac{L}{\lambda_s S}, \quad (4.30)$$

где λ_s — коэффициент теплопроводности твердого тела; R_2 — термическое сопротивление второго элемента системы.

После перехода через твердое тело тепло передается газу посредством конвекции и излучения. Тепловой поток в третьем элементе системы выражается формулой

$$Q_3 = \bar{\alpha}_{c2}S(T_{s2} - T_r) + \varepsilon\sigma S(T_{s2}^4 - T_r^4) = \frac{(T_{s2} - T_r)}{R_3}, \quad (4.31)$$

$$R_3 = [S (\bar{\alpha}_{c2} + \varepsilon\sigma(T_{s2}^2 + T_r^2)(T_{s2} + T_r))]^{-1},$$

где α_{c2} — коэффициент теплоотдачи в подсистеме стенка — газ; R_3 — термическое сопротивление третьего элемента системы.

В стационарных условиях тепловые потоки в каждом элементе системы должны быть одинаковыми ($Q_1 = Q_2 = Q_3$), в противном случае температуры жидкости, твердого тела и газа будут изменяться с течением времени. Используя эти равенства тепловых потоков и соотношения (4.29), (4.30) и (4.31), исключим температуры стенок твердого тела. Тогда для теплового потока получим следующее выражение:

$$Q \equiv Q_1 = Q_2 = Q_3 = \frac{(T_{ж} - T_r)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (4.32)$$

Заметим, что при последовательном соединении элементов тепловой поток определяется разностью температур первого и последнего элементов системы, а полное термическое сопротивление системы равно сумме термических сопротивлений составляющих ее элементов.

Исходя из полученного соотношения (4.32) можно количественно оценить вклад каждого термического сопротивления. Если окажется, что преобладающим будет вклад одного или двух элементов, то термическими сопротивлениями других элементов можно пренебречь. Это позволяет значительно упростить расчет теплового потока.

Контрольные вопросы

1. Какие процессы называют испарением и конденсацией?
2. Какой пар называют насыщенным?
3. От чего зависит давление насыщенного пара?
4. Как давление насыщенного пара зависит от объема сосуда, содержащего жидкость?
5. Какую температуру называют критической в системе жидкость — пар?
6. Что называют абсолютной влажностью воздуха?
7. Что такое относительная влажность воздуха?
8. Что такое точка росы?
9. Какой процесс называют теплообменом? Перечислите возможные виды теплообмена.
10. Как коэффициенты теплопроводности газов, жидкостей и твердых тел зависят от температуры?
11. Что представляет собой процесс конвективного переноса тепла?
12. Какую конвекцию называют вынужденной, а какую — свободной?
13. Какой процесс называют теплоотдачей?
14. От каких факторов зависит коэффициент теплоотдачи?
15. Какой физический смысл имеют безразмерные критерии Нуссельта, Прандтля и Грасгофа?
16. Что утверждает закон Стефана — Больцмана?
17. Как определяется тепловое сопротивление сложной системы, состоящей из последовательно соединенных элементов?

Примеры решения задач

Задача 4.1

Определите абсолютную влажность воздуха, если парциальное давление пара в нем $p = 14$ кПа, а температура $t^\circ = 60^\circ\text{C}$. Молярная масса водяного пара $M = 0,018$ кг/моль.

Решение

Состояние водяного пара массы m и объема V описывается уравнением Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT. \quad (4.33)$$

Отсюда абсолютная влажность определится следующей формулой:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pV}{RT}. \quad (4.34)$$

Подставляя численные значения определяющих параметров, предварительно приведенные к единицам СИ, получим

$$\rho = \frac{1,4 \cdot 10^4 \cdot 0,018}{8,3 \cdot 333} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 9,1 \cdot 10^{-2} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4.35)$$

Задача 4.2

Определите абсолютную и относительную влажности воздуха, если его температура $t^\circ = 18^\circ\text{C}$, а точка росы соответствует 8°C .

Решение

Абсолютная влажность воздуха при температуре 18°C (291 К) определяется плотностью насыщенного пара при температуре 8°C (281 К). В табл. 4.1 находим $\rho = 8,3 \cdot 10^{-3}$ кг/м³. Плотность насыщенного пара при темпе-

ратуре 291 К также указана в табл. 4.1: $\rho_n = 15,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$. Тогда относительная влажность воздуха составит:

$$\varphi = \frac{\rho}{\rho_n} \cdot 100\%, \quad \varphi = \frac{8,3 \cdot 10^{-3}}{15,4 \cdot 10^{-3}} \cdot 100\% = 54\%. \quad (4.36)$$

Задача 4.3

Относительная влажность воздуха в комнате составляет 63 %, а температура — 18 °С. На сколько градусов должна понизиться температура воздуха на улице, чтобы оконные стекла в комнате запотели?

Решение

Абсолютная влажность воздуха при температуре 18 °С (291 К) указана в табл. 4.1: $\rho_n = 15,4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$. Тогда абсолютная влажность воздуха составляет:

$$\rho = \frac{\varphi \cdot \rho_n}{100\%}, \quad \rho = 0,63 \cdot 15,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}. \quad (4.37)$$

При понижении температуры на улице стекло охлаждается. Как только температура стекла достигнет точки росы, пар начнет конденсироваться, и стекло запотееет. Точку росы, соответствующую найденной абсолютной влажности, определяем по табл. 4.1: $T_p = 283,5 \text{ К}$. Следовательно, окна запотееют, если температура на улице понизится на

$$\Delta T = T - T_p, \quad \Delta T = (291 - 283,5) \text{ К} = 7,5 \text{ К}. \quad (4.38)$$

Задача 4.4

В комнате объемом 40 м^3 температура воздуха составляет 20 °С, а его относительная влажность $\varphi_1 = 20\%$. Сколько надо испарить воды, чтобы относительная влажность возду-

ха φ_2 достигла 50 %? Известно, что при 20°C давление насыщенных паров $p_n = 2330$ Па. Молярная масса водяного пара $M = 0,018$ кг/моль.

Решение

Пусть ρ_1 и ρ_2 — абсолютные влажности воздуха при температурах 20°C и 50°C соответственно. Тогда массы водяного пара в комнате объемом V при этих температурах определяются формулами

$$m_1 = \rho_1 V, \quad m_2 = \rho_2 V. \quad (4.39)$$

Разность этих масс и будет равна массе воды m , которую испарили, чтобы изменить относительную влажность воздуха от начального значения φ_1 до конечного φ_2 :

$$m = m_2 - m_1 = V (\rho_2 - \rho_1). \quad (4.40)$$

Абсолютные влажности воздуха до и после испарения выразим через относительные влажности и плотность насыщенного пара:

$$\rho_1 = \frac{\varphi_1 \rho_n}{100\%}, \quad \rho_2 = \frac{\varphi_2 \rho_n}{100\%}. \quad (4.41)$$

Плотность насыщенного пара определим из уравнения Клапейрона — Менделеева:

$$p_n V = \frac{m}{M} RT, \quad \rho_n = \frac{m}{V} = \frac{M p_n}{RT}. \quad (4.42)$$

Отсюда с учетом соотношений (4.40) и (4.41) находим

$$m = \frac{M p_n V}{RT \cdot 100\%} (\varphi_2 - \varphi_1). \quad (4.43)$$

Подставляя заданные значения определяющих параметров, проведем расчет:

$$m = \frac{0,018 \cdot 2330 \cdot 40}{8,31 \cdot 293 \cdot 100} (50 - 20) \text{ кг} = 0,208 \text{ кг}.$$

Задача 4.5

В комнате при температуре $t_1^\circ = 15^\circ\text{C}$ относительная влажность $\varphi_1 = 10\%$. Как изменится относительная влажность, если температура в комнате повысится на 10°C ? Давление насыщенного пара ($p_{\text{н1}}$) при 15°C составляет 12,8 мм рт. ст., а при $t_2^\circ = 25^\circ\text{C}$ $p_{\text{н2}} = 23,8$ мм рт. ст.

Решение

Так как пар ненасыщенный, его состояние описывается законами идеального газа. При повышении температуры объем пара остается неизменным, равным объему комнаты, поэтому его давление изменяется по **закону Шарля**:

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \quad p_2 = \frac{p_1 T_2}{T_1}. \quad (4.44)$$

Здесь p_2 — давление ненасыщенного пара при температуре $t_2^\circ = 25^\circ\text{C}$ ($T_2 = 298 \text{ K}$). Давление p_1 ненасыщенного пара при температуре $t_1^\circ = 15^\circ\text{C}$ ($T_1 = 288 \text{ K}$) определим через относительную влажность:

$$p_1 = \frac{\varphi_1 p_{\text{н1}}}{100\%}. \quad (4.45)$$

Относительная влажность φ_2 при температуре T_2 с учетом выражений (4.44), (4.45) такова:

$$\varphi_2 = \frac{p_2}{p_{\text{н2}}} \cdot 100\% = \frac{p_1 T_2}{p_{\text{н2}} T_1} \cdot 100\% = \frac{\varphi_1 p_{\text{н1}} T_2}{p_{\text{н2}} T_1}. \quad (4.46)$$

В результате численного расчета получим:

$$\varphi_2 = 5,6\%, \quad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 4,4\%. \quad (4.47)$$

Задача 4.6

Стеклянная витрина магазина имеет площадь $S = 12 \text{ м}^2$ и толщину $d = 1 \text{ см}$. Коэффициент теплопроводности стекла $\lambda = 0,8 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Температура внешней поверхности стекла $T_1 = 272 \text{ К}$, а температура его внутренней поверхности $T_2 = 276 \text{ К}$. Найдите: а) тепловой поток через стекло; б) температуру в среднем сечении между внешней и внутренней поверхностями стекла. Считать, что температура внутри стекла изменяется по линейному закону.

Решение

Тепловой поток через стекло определяется законом теплопроводности Фурье:

$$Q = \frac{\lambda S}{d} (T_1 - T_2), \quad Q = \frac{0,8 \cdot 12}{0,01} 4 \text{ Вт} = 3840 \text{ Вт}. \quad (4.48)$$

Температура T в среднем сечении (при $d/2$) равна 274 К , среднему значению между температурами внешней и внутренней поверхностей стекла, так как температура в стекле имеет линейный профиль.

Задача 4.7

Стена здания состоит из слоя обычного кирпича [$d_1 = 0,1 \text{ м}$, $\lambda_1 = 0,7 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$] и слоя гипсовой штукатурки [$d_2 = 0,038 \text{ м}$, $\lambda_2 = 0,48 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$]. Сравните тепловые потоки через эту стену и через такую же стену с термическим сопротивлением на поверхности раздела между кирпичом и штукатуркой единичной площади $r = 0,1 \text{ (К} \cdot \text{м}^2)/\text{Вт}$.

Решение

В первом случае слой кирпича и слой штукатурки следует рассматривать как два последовательных элемента системы с термическими сопротивлениями

$$R_1 = d_1/(\lambda_1 S), \quad R_2 = d_2/(\lambda_2 S),$$

где S — площадь стены.

Если разность между температурами внешних поверхностей кирпичной стены и штукатурки равна $T_2 - T_1$, то тепловой поток через стену определяется следующим выражением:

$$Q_1 = \frac{(T_1 - T_2)}{R_1 + R_2}. \quad (4.49)$$

Во втором случае существует третий последовательно соединенный элемент с термическим сопротивлением $R = r/S$. Поэтому для теплового потока имеем формулу

$$Q_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{R_1 + R_2 + R}. \quad (4.50)$$

Отношение тепловых потоков составит:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1 + R_2 + R}{(R_1 + R_2)} = \frac{d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2 + r}{d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2}; \quad (4.51)$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{0,143 + 0,0792 + 0,1}{0,143 + 0,0792} = 1,45.$$

Таким образом, слой тепловой изоляции уменьшает теплообмен между двумя средами, разделенными стенкой, почти в полтора раза.

Задача 4.8

Кирпичная стена толщиной $d = 0,1 \text{ м}$ [$\lambda = 0,7 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$] обдувается холодным ветром с температурой 270 К при коэффициенте конвективной теплоотдачи $\bar{\alpha}_1 = 40 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. С другой стороны стены находится неподвижный воздух с температурой 330 К при коэффициенте конвективной теплоотдачи

$\bar{\alpha}_2 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Рассчитайте тепловой поток на единицу площади стены.

Решение

Система представляет собой три последовательно соединенных элемента: движущийся воздух (ветер) — кирпичная стена — неподвижный воздух. Термическое сопротивление первого элемента таково:

$$R_1 = \frac{1}{\bar{\alpha}_1 S}; \quad R_1 = \frac{1}{40 \cdot 1} \frac{\text{К}}{\text{Вт}} = 0,025 \frac{\text{К}}{\text{Вт}}. \quad (4.52)$$

Термическое сопротивление стены, обусловленное теплопроводностью кирпича, определяется по формуле

$$R_2 = \frac{d}{\lambda S}; \quad R_2 = \frac{0,1}{0,7 \cdot 1} \frac{\text{К}}{\text{Вт}} = 0,143 \frac{\text{К}}{\text{Вт}}. \quad (4.53)$$

Термическое сопротивление неподвижного воздуха

$$R_3 = \frac{1}{\bar{\alpha}_2 S}; \quad R_3 = \frac{1}{10 \cdot 1} \frac{\text{К}}{\text{Вт}} = 0,1 \frac{\text{К}}{\text{Вт}}. \quad (4.54)$$

Следовательно, тепловой поток на единицу площади, т. е. плотность теплового потока, составит:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{S} &= \frac{T_2 - T_1}{R_1 + R_2 + R_3}; \\ \frac{Q}{S} &= \frac{330 - 270}{0,025 + 0,143 + 0,1} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} = 224 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Задача 4.9

Рассчитайте радиационный тепловой поток, испускаемый в пространство верхней поверхностью горизонтальной квадратной плоской пластины со стороной $l = 2 \text{ м}$, температурой $T = 500 \text{ К}$ и степенью черноты $\varepsilon = 0,6$.

Решение

Площадь излучающей поверхности $S = l^2 = 4 \text{ м}^2$. Тепловой поток рассчитывается по формуле (4.25):

$$\begin{aligned} Q &= \varepsilon \sigma S T^4; \\ Q &= 0,6 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 500^4 \text{ Вт} = 8508 \text{ Вт}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Задача 4.10

Температура стенки паропровода диаметром $d = 0,5 \text{ м}$ $T_1 = 500 \text{ К}$. Степень черноты стенки $\varepsilon = 0,6$. Паропровод расположен в помещении с температурой воздуха $T_2 = 300 \text{ К}$, коэффициент конвективной теплоотдачи от его поверхности окружающему воздуху $\bar{\alpha}_c = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$. Рассчитайте полный коэффициент теплоотдачи и тепловые потери на единицу длины паропровода.

Решение

Коэффициент теплоотдачи излучением рассчитывается по формуле (4.28):

$$\bar{\alpha}_r = \varepsilon \sigma (T_1^2 + T_2^2)(T_1 + T_2), \quad \bar{\alpha}_r = 13,9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \quad (4.57)$$

Полный коэффициент теплоотдачи:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \bar{\alpha}_r + \bar{\alpha}_c; \\ \bar{\alpha} &= (20 + 13,9) \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}) = 33,9 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Тепловые потери на единицу длины трубопровода ($L = 1 \text{ м}$) за счет теплоотдачи окружающему воздуху составят:

$$\begin{aligned} Q &= \pi d L \bar{\alpha} (T_1 - T_2); \\ Q &= \pi \cdot 0,5 \cdot 1 \cdot 33,9 \cdot (500 - 300) \text{ Вт} = 10650 \text{ Вт}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Задача 4.11

Определите величину тепловых потерь от горизонтальной паровой трубы наружным диаметром $D = 0,3$ м и длиной $L = 10$ м. Температура наружной поверхности трубы $T_1 = 510$ К, а температура воздуха в помещении, в котором находится труба, $T_2 = 300$ К.

Решение

Теплообмен обусловлен, главным образом, конвекцией окружающего трубу воздуха.

Все теплофизические свойства системы будем относить к среднеарифметической температуре:

$$T_a = \frac{T_1 + T_2}{2}; \quad T_a = \frac{510 + 300}{2} \text{ К} = 405 \text{ К}. \quad (4.60)$$

Для этой температуры из справочных таблиц находим значения коэффициента объемного теплового расширения сухого воздуха при атмосферном давлении ($\beta = 2,50 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$), кинематической вязкости ($\nu = 22,97 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$), коэффициента теплопроводности [$\lambda = 0,0327 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$] и числа Прандтля ($Pr = 0,71$). При этих значениях теплофизических параметров вычисляем по формулам (4.22) произведение чисел Грасгофа и Прандтля:

$$Gr \cdot Pr = \frac{g\beta}{\nu^2}(T_1 - T_2)D^3Pr; \quad Gr \cdot Pr = 1,5 \cdot 10^8. \quad (4.61)$$

Из табл. 4.5 для горизонтальных цилиндров находим $C = 0,53$ и $n = 0,25$. Формула (4.24) позволяет вычислить критерий Нуссельта:

$$Nu_a = 0,53(Gr_a \cdot Pr_a)^{0,25} = 0,53(1,5 \cdot 10^8)^{0,25} = 58,7. \quad (4.62)$$

Отсюда с учетом первой из формул (4.22) коэффициент конвективного теплообмена таков:

$$\overline{\alpha}_c = \frac{\lambda \cdot Nu_a}{D}; \quad (4.63)$$

$$\overline{\alpha}_c = \frac{0,0327 \cdot 58,7}{0,3} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}) = 6,4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}).$$

Следовательно, тепловые потери составляют:

$$\begin{aligned} Q_c &= \overline{\alpha}_c \cdot \pi \cdot D \cdot L \cdot (T_1 - T_2); \\ Q_c &= 6,4 \cdot \pi \cdot 0,3 \cdot 10 \cdot 210 \text{ Вт} = 12,7 \text{ кВт}. \end{aligned} \quad (4.64)$$

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

В природе и технике часто можно наблюдать движения или процессы, обладающие свойством повторяемости во времени. Например, смена времен года, приливы и отливы, движение планет вокруг Солнца, верхушек деревьев при порывах ветра, качелей, поршня двигателя внутреннего сгорания, биение сердца и т. д. Такие повторяющиеся с течением времени движения и процессы называют *колебаниями*.

В инженерной практике и архитектуре важную роль играют механические колебания. Любое строительное сооружение — мост, телевизионная вышка, высотное здание — совершает механические колебания, определяемые внутренними и внешними факторами. Надежность таких сооружений во многом зависит от того, насколько полно учтены при проектировании все эти факторы.

Напомним, что механическим движением некоторого тела называют изменение положения этого тела в пространстве относительно других тел с течением времени. Возможны механические движения, которые с течением времени повторяются. Например, движение маятника часов или подвешенного на пружине тела.

Движение, при котором состояния движущегося тела с течением времени повторяются, причем тело проходит через положение устойчивого равновесия в противоположных направ-

лениях, называют механическим колебательным движением.

5.1. Собственные колебания

Представим себе подвешенное на пружине тело. Если пружину растянуть, а затем отпустить, то тело будет совершать колебательное движение. При этом на колеблющееся тело не оказывается никакого внешнего воздействия, а колебания происходят благодаря силе упругости пружины (силы сопротивления мы пока не рассматриваем).

Колебания, возникающие в системе под действием внутренних сил после того, как она была выведена из состояния устойчивого равновесия, и происходящие за счет сообщенной системе энергии, которая в дальнейшем не пополняется, называются свободными колебаниями.

Каждый законченный цикл колебательного движения некоторого тела, вновь повторяющийся в том же порядке, называют полным колебанием этого тела.

Колебательное движение, при котором состояния колеблющегося тела повторяются через одинаковые промежутки времени, называют периодическим колебательным движением.

Периодом T периодического колебательного движения называют время совершения одного полного колебания, т. е. наименьший промежуток времени, в течение которого тело возвращается в исходное состояние, заканчивая полный колебательный цикл. В СИ единицей измерения периода колебаний является *секунда* (с).

Наряду с понятием «период» вводят понятие частота ν колебательного движения, характеризующее число полных ко-

лебаний, совершаемых телом за единицу времени. Очевидно, что частота связана с периодом колебаний обратной пропорциональной зависимостью

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

В СИ частота измеряется в *герцах*. Герц (Гц) — это частота такого колебательного движения, при котором за каждую секунду совершается одно полное колебание: $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

При описании периодического колебательного движения наряду с частотой ν используют величину $\omega_0 = 2\pi\nu$, называемую *циклической* или *круговой частотой колебаний*. Единицей ее измерения в СИ является *радиан в секунду*: $[\omega_0] = 1 \text{ рад/с}$. По принятому соглашению единица радиан не пишется, т. е. $[\omega_0] = 1 \text{ с}^{-1}$.

Частоту ω_0 свободных колебаний называют *собственной частотой колебательной системы*.

5.2. Гармонические колебания

Простейшим типом периодических колебаний являются гармонические колебания — колебания, при которых изменение смещения тела от положения устойчивого равновесия происходит по закону синуса или косинуса.

Рассмотрим одномерные гармонические колебания, т. е. колебания, совершаемые телом вдоль прямой. В этом случае положение центра масс тела в любой момент времени определяется единственной координатой. Направим ось x по прямой, вдоль которой движется тело. Начало координатной оси совместим с положением устойчивого равновесия тела. При гармонических колебаниях смещение x относительно положения равновесия в общем случае описывается следующей формулой:

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.1)$$

Здесь величина A — *амплитуда колебаний*, определяющая модуль максимального смещения тела от положения равновесия. Величина амплитуды колебаний зависит от того, насколько мы смещаем тело от положения равновесия в начальный момент времени. Величина $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ — это *фаза колебаний*, определяющая положение колеблющегося тела в данный момент времени t . Величина φ_0 — *начальная фаза*, определяющая положение тела в начальный момент времени $t = 0$. В отличие от амплитуды частота и фаза свободных колебаний зависят не от приложенных к телу в начальный момент времени внешних сил, а от свойств самой колеблющейся системы.

На рис. 5.1 показана зависимость смещения тела от времени при гармонических колебаниях ($\varphi_0 = 0$).

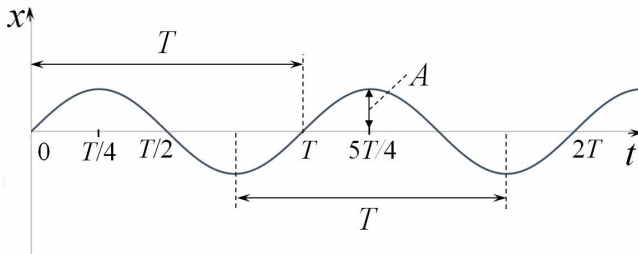


Рис. 5.1

Гармонические колебания можно представить наглядно, если рассмотреть равномерное вращение шарика, прикрепленного нерастяжимой нитью к точке O , по окружности радиуса R (рис. 5.2).

Слева на шарик направлены параллельные лучи света, а справа установлен вертикальный экран. При равномерном вращении шарика его тень (точка B) движется вдоль экрана между

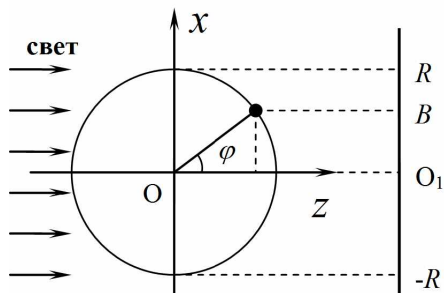


Рис. 5.2

точками с координатами $x = -R$ и $x = +R$. Очевидно, такое движение тени шарика можно рассматривать как совершение ею гармонических колебаний относительно точки O_1 .

Действительно, проекция нити на вертикальную ось x равна $x = R \sin \varphi$, где φ — угол между нитью и горизонтальной осью z . Если за время t нить, к которой прикреплен шарик, поворачивается на угол φ , то угловая скорость вращательного движения равна $\omega = \varphi/t$.

Следовательно, закон движения тени B на экране запишется в виде

$$x = R \sin(\omega t).$$

Радиус траектории движения шарика R играет роль амплитуды гармонических колебаний. Мы предполагали, что в начальный момент времени нить направлена вдоль горизонтальной оси, т. е. тень B совпадает с точкой O_1 на экране. При этом $\varphi = 0$.

В общем случае мы можем начать наблюдение с того момента, когда нить составляет с осью z угол φ_0 . Тогда закон движения тени на экране будет описываться формулой (5.1).

5.3. Понятие производной

Понятие производной от некоторой функции просто и наглядно можно пояснить на примере прямолинейного движения⁷. Представим себе, что мы наблюдаем движение некоторого тела по прямолинейной траектории. Выберем координатную ось вдоль направления движения, а за начало координат примем точку, в которой находилось тело в начальный момент времени. В нашем распоряжении имеется секундомер. С его помощью мы можем в любой момент времени t определить пройденный телом путь s . Таким образом, каждому моменту времени t соответствует определенное значение s , т. е. s является функцией t . Этот факт принято записывать как $s(t)$, где время t называют аргументом функции s .

Пусть нас интересует скорость движения тела в некоторый фиксированный момент времени t_0 . Заметим путь $s(t_0)$, пройденный телом за время t_0 . Спустя малый промежуток времени Δt , т. е. в момент $t_0 + \Delta t$, снова заметим пройденный путь $s(t_0 + \Delta t)$. Тогда отрезок пути, пройденный телом за промежуток времени Δt , таков:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Очевидно, за единицу времени тело в среднем проходило путь

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

⁷ Подраздел 5.3 заимствован из книги: Малая математическая энциклопедия / Э. Фрид, И. Пастор, И. Рейман, П. Ревес, И. Ружа. Будапешт: Изд-во Академии наук Венгрии, 1976. С. 435–438.

Записанное отношение называют средней скоростью движения тела за промежуток времени Δt . Но эту величину в общем случае (кроме равномерного прямолинейного движения) нельзя назвать средней скоростью в момент времени t_0 , так как, выбирая разные Δt , мы будем получать разные приращения Δs пройденного пути. Чтобы определить величину скорости в момент времени t_0 , так называемую *мгновенную скорость*, необходимо рассмотреть приращение пути, пройденного телом за бесконечно малый промежуток времени Δt . Математически мгновенную скорость $v(t_0)$ записывают в следующем виде:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (5.2)$$

Смысловое содержание математического обозначения \lim (от лат. *limes*) — предел. Правую часть выражения (5.2) называют *производной функции $s(t)$ по переменной t в точке t_0* . В общем случае производная обозначается как

$$\frac{ds}{dt}.$$

Операцию взятия производной функции $s(t)$ называют *дифференцированием* этой функции.

В физике производные какой-либо функции $x(t)$ по времени t для сокращения записи часто обозначают как \dot{x} . Таким образом, величину мгновенной скорости в любой момент времени записывают в виде

$$v = \dot{s}. \quad (5.3)$$

Очевиден геометрический смысл производной \dot{s} (рис. 5.3).

Точка $[(t_0 + \Delta t); s(t_0 + \Delta t)]$ секущей при $\Delta t \rightarrow 0$ неограниченно приближается к точке $[t_0; s(t_0)]$, т. е. секущая стремится занять положение касательной к кривой $s(t)$ в точке t_0 .

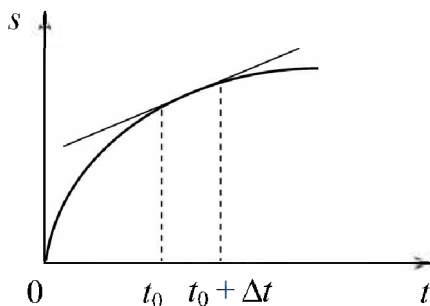


Рис. 5.3

При неравномерном движении тела его скорость будет разной в разные моменты времени. Это означает, что скорость, как и путь, является функцией времени $v(t)$.

Ускорение — это изменение скорости за единицу времени. Величина ускорения $a(t)$ в некоторый момент времени t (мгновенное ускорение) определяется по аналогии со скоростью:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v} = \ddot{s}. \quad (5.4)$$

Здесь учтено выражение (5.3). Величину \ddot{s} называют *второй производной функции $s(t)$ по переменной t* .

Очевидно, что производная постоянной величины s (равномерное движение, при котором за любые равные промежутки времени тело проходит одинаковый путь; при этом график функции $s(t)$ имеет вид горизонтальной линии, параллельной оси времени t) по времени t равна нулю. В любом другом случае для вычисления производной \dot{s} следует использовать таблицы производных элементарных функций и основные правила дифференцирования.

5.4. Скорость и ускорение гармонических колебаний

Рассмотрим одномерные гармонические колебания некоторого тела, происходящие вдоль оси OX . Смещение тела от положения устойчивого равновесия в момент времени t в общем случае описывается выражением

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.5)$$

Тогда проекция вектора скорости колебательного движения на ось OX определяется производной смещения по времени

$$v_x = \dot{x} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.6)$$

Таким образом, проекция скорости колебаний на координатную ось OX также изменяется с течением времени по гармоническому закону. При этом амплитуда изменения скорости равна $A\omega_0$, а фаза скорости опережает фазу смещения на $\pi/2$.

Проекция вектора ускорения на ось OX определится первой производной проекции скорости $v_x(t)$ по времени t или второй производной смещения $x(t)$:

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.7)$$

Следовательно, изменения ускорения и смещения происходят в противоположных фазах. Это означает, что в момент времени, когда смещение достигает своего максимального положительного значения A , ускорение принимает отрицательное амплитудное значение $-A\omega_0^2$. И, наоборот, когда смещение имеет отрицательное амплитудное значение $-A$, ускорение достигает положительного амплитудного значения $A\omega_0^2$. Из сравнения

выражений (5.5) и (5.7) видим, что ускорение пропорционально смещению:

$$a_x = -\omega_0^2 x. \quad (5.8)$$

На рис. 5.4 показаны качественно зависимости смещения $x(t)$, скорости $v_x(t)$ и ускорения $a_x(t)$ от времени при начальной фазе, равной $\pi/2$ ($\varphi_0 = \pi/2$).

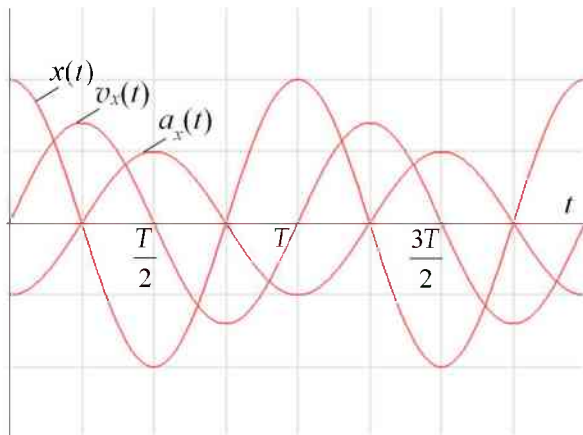


Рис. 5.4

В начальный момент времени при $t = 0$ смещение имеет положительное амплитудное значение, скорость равна нулю, а ускорение равно отрицательному амплитудному значению. Через четверть периода при $t = T/4$ колеблющееся тело находится в точке равновесия, его скорость максимальна по модулю и направлена противоположно оси OX , а ускорение равно нулю. Спустя половину периода при $t = T/2$ тело смещено максимально в сторону, противоположную направлению координатной оси OX , скорость равна нулю, а ускорение имеет положительное амплитудное значение. Через три четверти периода смещение и ускорение равны нулю, а скорость колебаний тела максимальна.

Наконец, через один период состояние тела становится таким же, как в начальный момент времени.

5.5. Динамика гармонических колебаний

Рассмотрим колебания, совершаемые телом массой m вдоль горизонтальной плоскости за счет силы упругости пружины, которая закреплена на вертикальной стенке (рис. 5.5).

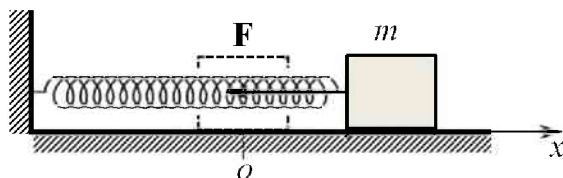


Рис. 5.5

Силой трения, возникающей при движении тела вдоль горизонтальной поверхности, в первом приближении пренебрегаем. На тело действует только сила упругости пружины, проекция которой на ось OX определяется законом Гука (1.2)

$$F_x = -kx, \quad (5.9)$$

где x — смещение центра масс тела относительно положения равновесия; k — коэффициент упругости пружины, зависящий от свойств материала и геометрии тела. Знак минус в выражении (5.9) показывает, что сила упругости направлена в сторону, противоположную смещению x .

Движение тела по второму закону динамики описывается следующим уравнением:

$$ma_x = F_x, \quad \text{или с учетом (5.9)} \quad a_x = \ddot{x} = -\frac{k}{m}x. \quad (5.10)$$

Сравнивая с выражением (5.8), получаем

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (5.11)$$

Видим, что собственная частота $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ колебаний тела зависит только от характеристик самой системы — массы тела m и коэффициента жесткости пружины k .

Уравнение (5.11) описывает незатухающие гармонические колебания тела. Убедиться в этом можно путем непосредственной подстановки выражения (5.1) в уравнение (5.11). Заметим, что полученное уравнение (5.11) является общим, т. е. описывает незатухающие свободные гармонические колебания независимо от природы колеблющейся системы.

5.6. Колебания груза на пружине

Груз массой m подвешен на пружине с коэффициентом жесткости k . Направим координатную ось X вертикально вниз (рис. 5.6).

Начало координат выберем в точке положения равновесия груза (точка O). На груз действуют сила упругости пружины \mathbf{F} и сила тяжести $m\mathbf{g}$ (\mathbf{g} — ускорение свободного падения). В положении равновесия пружина растянута на величину x_0 , которая определяется из условия равенства нулю результирующей силы

$$F_x + mg_x = 0.$$

С учетом закона Гука для силы упругости $F_x = -kx_0$ и $g_x = g$ получим

$$x_0 = \frac{mg}{k}. \quad (5.12)$$

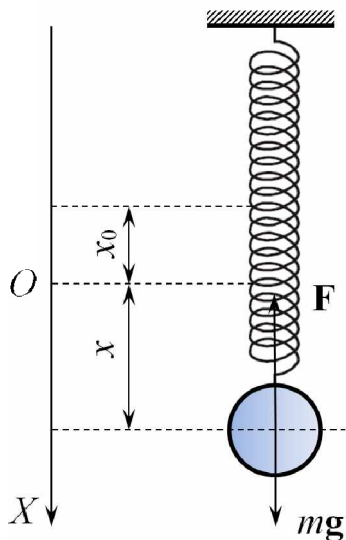


Рис. 5.6

При смещении от положения равновесия на величину x на тело действует сила упругости пружины

$$F_x = -k(x_0 + x).$$

Тогда уравнение движения тела запишется в виде

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F},$$

в проекции на ось OX

$$ma_x = mg - k(x_0 + x). \quad (5.13)$$

Отсюда с учетом выражения (5.12) имеем

$$ma_x = -kx. \quad (5.14)$$

Мы получили уравнение гармонических колебаний тела, подвешенного на пружине. Это уравнение не включает силу

тяжести. Очевидно, что действие этой силы сводится только к смещению положения равновесия на величину x_0 . При отсутствии силы тяжести уравнение (5.14) не изменится, но тело будет совершать гармонические колебания относительно другого положения равновесия.

Из сравнения уравнений (5.14) и (5.8) для циклической частоты и периода колебаний получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.15)$$

Таким образом, тело, имеющее бóльшую массу, совершает гармонические колебания с меньшей частотой и бóльшим периодом. Если одно и то же тело подвешивать к разным пружинам, то бóльшему коэффициенту жесткости будут соответствовать бóльшая частота и меньший период колебаний.

5.7. Колебания математического маятника

Математическим маятником называют материальную точку, подвешенную на длинной невесомой нерастяжимой нити. Такая идеализированная система хорошо моделирует реальный маятник при выполнении следующих условий:

- размерами тела можно пренебречь по сравнению с длиной l нити;
- массой нити можно пренебречь по сравнению с массой m тела;
- деформация нити пренебрежимо мала по сравнению с ее длиной.

Рассмотрим математический маятник, представляющий собой тело массой m , подвешенное на нити длиной l в точке O_1

(рис. 5.7). Точка O соответствует положению устойчивого равновесия тела.

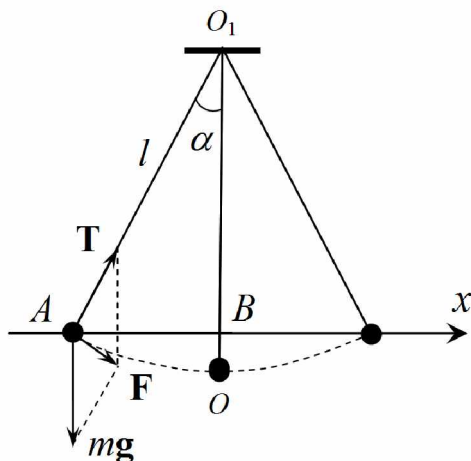


Рис. 5.7

На тело действуют сила тяжести mg и сила натяжения нити \mathbf{T} . В положении равновесия (точка O) эти силы взаимно скомпенсированы. Если подвес отклонен от вертикали O_1O на некоторый угол α , то на тело действует результирующая сила

$$\mathbf{F} = \mathbf{T} + mg,$$

направленная в сторону положения равновесия. Эта сила и является причиной колебательного движения тела.

Примем два важных предположения: (1) силой трения можно пренебречь; (2) угол α отклонения подвеса мал. Первое предположение выполняется точно только в условиях вакуума. В любой среде, например в воздухе, на движущееся тело действует сила сопротивления, направленная противоположно

вектору скорости тела. В первом приближении эту силу мы учитывать не будем.

Пусть подвес отклонился от вертикали на малый угол α так, что тело находится в точке A . Координатную ось X проведем через точку A перпендикулярно направлению вертикали O_1O . За начало координат примем точку B , в которой эта вертикаль пересекает ось X .

По второму закону Ньютона уравнение движения тела в проекции на ось x имеет вид

$$ma_x = F_x. \quad (5.16)$$

Треугольники AO_1B и ATF подобны, так как у них одинаковые углы. Отсюда следует:

$$\frac{AB}{l} = \frac{F}{mg}, \quad F = \frac{mg}{l} AB. \quad (5.17)$$

Поскольку угол отклонения α мал, приближенно можно считать, что $AO \approx AB = x$, а результирующая сила \mathbf{F} направлена вдоль оси X .

Из рис. 5.7 видно, что при $x < 0$ проекция силы положительна, $F_x > 0$, т. е. смещение x и проекция результирующей силы F_x направлены в противоположные стороны. Тогда из (5.17) следует:

$$F_x = -\frac{mg}{l} x.$$

Уравнение движения (5.16) дает

$$ma_x = -\frac{mg}{l} x, \quad a_x = -\frac{g}{l} x. \quad (5.18)$$

Сравнивая уравнения (5.18) и (5.8), для циклической частоты и периода колебаний получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.19)$$

Таким образом, период колебаний математического маятника не зависит от его массы, а определяется только длиной нити и ускорением свободного падения в том месте, где находится маятник. Кроме того, период колебаний не зависит от амплитуды. Это свойство, называемое *изохронностью* маятника, было использовано голландским физиком Х. Гюйгенсом для создания в 1657 г. первых маятниковых часов. Формула (5.19) для периода колебаний маятника также впервые была получена Гюйгенсом и носит его имя.

5.8. Колебания тела, погруженного в жидкость

Рассмотрим плавающий в жидкости цилиндр (поплавок). Известны высота цилиндра h , плотность материала ρ_m , из которого он изготовлен, и плотность жидкости $\rho_{ж}$.

На погруженный в жидкость цилиндр действуют сила тяжести mg (m — масса цилиндра, g — ускорение свободного падения) и выталкивающая сила Архимеда F_A . Если цилиндр находится на поверхности жидкости в состоянии равновесия, то по условию плавания тела результирующая приложенных сил должна быть равна нулю:

$$mg + F_A = 0.$$

Направим координатную ось X вертикально вниз (рис. 5.8). За начало координат примем точку O на поверхности жидкости. Как и ранее предположим, что цилиндр может двигаться в жидкости без сопротивления, что соответствует модели идеальной жидкости.

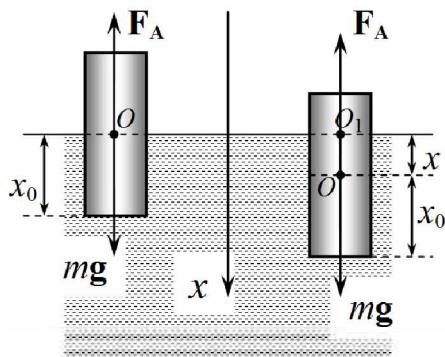


Рис. 5.8

В проекции на ось X уравнение равновесия цилиндра будет иметь вид $mg = F_A$. Пусть x_0 — глубина погружения цилиндра в жидкость, а S — площадь его поперечного сечения. Тогда уравнение равновесия примет следующий вид:

$$\rho_m Shg = \rho_{ж} Sx_0 g.$$

Отсюда глубина погружения такова:

$$x_0 = \frac{\rho_m}{\rho_{ж}} h. \quad (5.20)$$

Если погрузить цилиндр в жидкость на величину x относительно положения равновесия x_0 , то выталкивающая сила окажется больше силы тяжести, и состояние равновесия цилиндра нарушится. Его движение описывается вторым законом Ньютона:

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_A, \quad ma_x = mg - \rho_{ж} S(x_0 + x)g. \quad (5.21)$$

С учетом выражения (5.20) имеем

$$ma_x = -\rho_{ж} Sgx, \quad a_x = -\frac{\rho_{ж} g}{\rho_m h} x. \quad (5.22)$$

Здесь учтено, что $m = \rho_m Sh$. Уравнение (5.22) описывает незатухающие гармонические колебания цилиндра, погруженного в жидкость. Вновь из сравнения уравнений (5.22) и (5.8) для циклической частоты и периода колебаний получим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho_{жg}}{\rho_m h}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_m h}{\rho_{жg}}}. \quad (5.23)$$

Таким образом, чем больше плотность жидкости, тем меньше период колебаний погруженного в нее тела.

Итак, мы рассмотрели три примера гармонических колебаний, имеющих разную физическую природу. Общим у них является то, что вызваны они результирующими силами, пропорциональными смещению тела относительно положения равновесия. Такие силы часто называют к в а з и у п р у г и м и силами. Поэтому можно сделать следующий обобщающий вывод: если тело смещено относительно положения устойчивого равновесия и при этом результирующая приложенных сил пропорциональна этому смещению и направлена в противоположную сторону, то тело будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия.

5.9. Превращение энергии при колебаниях

Рассмотрим превращение энергии при незатухающих гармонических колебаниях, происходящих по закону

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.24)$$

Скорость колеблющегося тела определяется выражением (5.6). Тогда кинетическая энергия этого тела, имеющего массу m , составит:

$$E_{\kappa} = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.25)$$

Мы рассматриваем колебательную систему как консервативную, т. е. как замкнутую систему, в которой отсутствуют силы трения. В этом случае по закону сохранения энергии полная механическая энергия системы E не изменяется с течением времени:

$$E = E_{\kappa} + E_{\Pi} = \text{const},$$

где E_{Π} — потенциальная энергия системы.

Выберем нулевой уровень отсчета потенциальной энергии, соответствующий положению равновесия. Тогда в положении равновесия потенциальная энергия колеблющегося тела равна нулю, а кинетическая энергия максимальна и равна полной механической энергии системы. Из выражения (5.25) следует, что

$$E = (E_{\kappa})_{\max} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (5.26)$$

Энергия колебательного движения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний. Отсюда потенциальная энергия

$$\begin{aligned} E_{\Pi} = E - E_{\kappa} &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \\ &= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Введем обозначение $k = m\omega_0^2$. Тогда из сравнения выражений (5.27) и (5.24) получим

$$E_{\Pi} = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.28)$$

т. е. независимо от физической природы гармонических колебаний потенциальная энергия пропорциональна квадрату смеще-

ния. Коэффициент пропорциональности k имеет смысл жесткости пружины, если колебания совершает тело, прикрепленное к пружине. Для других систем этот коэффициент сам по себе не имеет физического смысла и зависит от параметров системы.

На рис. 5.9 показана зависимость потенциальной энергии от смещения.

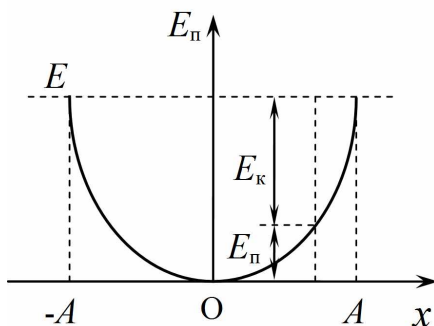


Рис. 5.9

Видно, что в положении равновесия ($x = 0$) потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия максимальна и равна полной механической энергии системы. При максимальном смещении от положения равновесия ($x = \pm A$) кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная энергия максимальна и равна полной механической энергии системы. В процессе колебаний кинетическая энергия тела переходит в потенциальную, а затем потенциальная энергия переходит в кинетическую. Взаимное превращение энергий происходит непрерывно. При этом полная механическая энергия незатухающего колебательного движения остается постоянной.

Согласно выражению (5.26) амплитуда колебаний такова:

$$A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{2E}{m}}. \quad (5.29)$$

Чем бóльшую энергию сообщают системе, тем больше амплитуда колебаний.

Перепишем выражения (5.25) для кинетической и (5.27) для потенциальной энергий, воспользовавшись известными тригонометрическими формулами ⁸:

$$\begin{aligned} E_{\text{к}} &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \{1 + \cos [2(\omega_0 t + \varphi_0)]\}, \\ E_{\text{п}} &= \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \{1 - \cos [2(\omega_0 t + \varphi_0)]\}. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Таким образом, при взаимных превращениях энергии изменяются по гармоническому закону с частотой $2\omega_0$. Колебания энергий происходят относительно значения $mA^2\omega_0^2/4 = E/2$ с частотой, в два раза превышающей частоту колебаний тела.

5.10. Затухающие колебания

До сих пор мы обсуждали идеализированные колебательные системы, в которых отсутствуют силы трения. В реальных системах трение присутствует всегда. В рассмотренных выше гармонических колебаниях существует трение между телом и горизонтальной поверхностью, вдоль которой тело движется, между маятником и окружающей средой, между поплавком и жидкостью.

Рассмотрим силы вязкого трения, которые имеют место при движении тел в газах и жидкостях. Установлено экспериментально и показано теоретически, что эти силы пропорциональны скорости движения тела и направлены в противоположную сторону:

$$\mathbf{F}_c = -r\mathbf{v}, \quad (5.31)$$

⁸ $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha)$, $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$.

где r — постоянный положительный коэффициент, физический смысл которого определяется физической природой колебательной системы. Например, при движении маятника в воздухе или поплавок в жидкости это может быть коэффициент, пропорциональный вязкости среды [см. формулу Стокса (3.33)].

В уравнении движения кроме квазиупругой силы $F_x = -kx$ необходимо учитывать и силу сопротивления $F_{cx} = -rv_x$:

$$ma_x = -kx - rv_x, \quad \text{или} \quad a_x = -\omega_0^2 x - 2\beta v_x, \quad (5.32)$$

где $\omega_0^2 = k/m$ — квадрат собственной частоты колебаний; $\beta = r/(2m)$ — коэффициент затухания с^{-1} .

Учитывая выражения (5.6) для скорости и (5.7) для ускорения, запишем уравнение движения (5.32) в виде дифференциального уравнения

$$\ddot{x} = -2\beta\dot{x} - \omega_0^2 x. \quad (5.33)$$

В полученном уравнении в отличие от уравнения (5.11) в правой части присутствует член, связанный с силой трения в колебательной системе. Общее решение уравнения (5.33) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \quad (5.34)$$

где A_0 — постоянный коэффициент; φ_0 — начальная фаза колебаний, определяемая положением тела в начальный момент времени; $e = 2,71828$ — основание натуральных логарифмов (так называемая *экспонента*).

В справедливости полученного результата нетрудно убедиться посредством подстановки выражения (5.34) в уравнение (5.33).

Колебания, описываемые выражением (5.34), не являются гармоническими, так как их амплитуда уменьшается с течением времени по экспоненциальному закону:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (5.35)$$

Такие колебания называют *з а т у х а ю щ и м и*. Заметим, что частота затухающих колебаний ω меньше частоты собственных колебаний системы ω_0 , а период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (5.36)$$

На рис. 5.10 показана качественная зависимость амплитуды колебаний от времени.

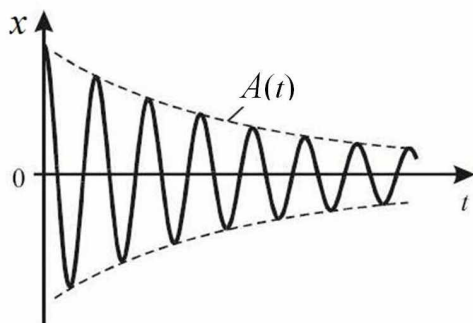


Рис. 5.10

Видно, что амплитуда колебаний уменьшается с течением времени. За время $t_0 = \beta^{-1}$ амплитуда уменьшится в e раз. Время t_0 принято называть *временем затухания*. Постепенно колебания полностью затухают. Объяснить полученный результат можно следующим образом. В неконсервативной колебательной системе, в которой действуют силы трения, полная механическая энергия не сохраняется, некоторая ее часть переходит во

внутреннюю энергию. Изменение полной механической энергии равно работе сил трения:

$$\Delta E = A_c.$$

Но сила трения, всегда направленная в противоположную движению тела сторону, совершает отрицательную работу, т. е. энергия колебаний уменьшается с течением времени, $\Delta E < 0$. Амплитуда колебательного движения тоже убывает с течением времени, поскольку она связана с энергией колебаний (5.29).

Количество совершенных системой колебаний за время, равное времени затухания t_0 , равно отношению t_0 к периоду затухающих колебаний:

$$N = \frac{t_0}{T} = \frac{\omega}{2\pi\beta}.$$

Если коэффициент затухания много меньше собственной частоты колебаний ($\beta \ll \omega_0$), то из (5.34) следует, что $\omega \approx \omega_0$. Тогда число колебаний велико:

$$N = \frac{\omega_0}{2\pi\beta} \gg 1. \quad (5.37)$$

5.11. Добротность колебательной системы

Согласно выражению (5.28) потенциальная энергия колебательной системы пропорциональна квадрату смещения.

С учетом (5.34) имеем

$$E_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\beta t} \sin^2(\omega t + \varphi_0). \quad (5.38)$$

Скорость одномерных колебаний

$$v_x = \dot{x} = -A_0\beta e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0) + A_0\omega e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Если коэффициент затухания много меньше собственной частоты колебаний ($\beta \ll \omega_0$), то первым слагаемым можно

пренебречь. В этом случае кинетическая энергия колебаний определится следующим выражением:

$$E_k = \frac{mv_x^2}{2} = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-2\beta t} \cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (5.39)$$

Кроме того, учтем, что при $\beta \ll \omega_0$ частота затухающих колебаний приближенно равна частоте собственных колебаний $\omega \approx \omega_0$. Поскольку $k = m\omega_0^2$, полная механическая энергия колебательной системы

$$E(t) = E_n + E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2 e^{-2\beta t} = E_0 e^{-2\beta t}, \quad (5.40)$$

где $E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 A_0^2$ — полная энергия системы в начальный момент времени.

Энергия колебаний монотонно убывает с течением времени по экспоненциальному закону. В физике это убывание энергии характеризуют величиной, которая называется *добротностью колебательной системы*.

Добротность Q определяется отношением запасенной энергии $E(t)$ к энергии ΔE_T , теряемой системой в течение периода колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{\Delta E_T} = 2\pi \frac{E_0 e^{-2\beta t}}{E_0 e^{-2\beta t} - E_0 e^{-2\beta(t+T)}} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}. \quad (5.41)$$

Так как $\beta \ll \omega$, т. е. $\beta T \ll 1$, экспоненту в знаменателе можно разложить в ряд, ограничившись линейным членом

$$e^{-2\beta T} \approx 1 - 2\beta T.$$

В результате получим

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} \approx \frac{\omega_0}{2\beta} = \pi N. \quad (5.42)$$

Добротность колебательной системы часто характеризуют величиной *логарифмический декремент затухания* δ , который

определяется логарифмом отношения амплитуд затухающих колебаний в моменты времени t и $t + T$. Учитывая (5.35), получаем

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T = \frac{1}{N}. \quad (5.43)$$

Из выражений (5.42) и (5.43) имеем следующую связь добротности колебательной системы с логарифмическим декрементом затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}. \quad (5.44)$$

Заметим, что добротность колебательной системы не зависит от времени только при экспоненциальном убывании энергии колебаний со временем.

5.12. Вынужденные колебания. Резонанс

Свободные колебания вследствие действующих в системе сил трения с течением времени затухают. Для поддержания колебаний системе необходимо сообщить дополнительную энергию, которая компенсировала бы уменьшение механической энергии, вызванное работой сил трения. Сделать это можно путем воздействия на систему внешней переменной силой. Подчеркнем, что *внешняя сила должна периодически изменяться с течением времени*, так как постоянная сила только смещает положение равновесия тела (большой груз, подвешенный к пружине, больше растягивает эту пружину), но не может поддерживать колебания.

Пусть на систему вдоль координатной оси X действует вынуждающая сила

$$F_{\text{в}} = F_0 \sin(\Omega t), \quad (5.45)$$

где F_0 — амплитудное значение силы; Ω — частота изменения внешней силы.

Таким образом, в системе действуют три силы: квазиупругая сила, сила трения и внешняя вынуждающая сила. Тогда уравнение движения тела, совершающего одномерные колебания вдоль оси X , запишется в виде

$$ma_x = -kx - rv_x + F_0 \sin(\Omega t). \quad (5.46)$$

Сначала колебания системы будут складываться из собственных колебаний, происходящих за счет действующих в системе внутренних сил (например, силы упругости пружины), и колебаний под действием внешней вынуждающей силы. Собственные колебания являются затухающими и со временем прекратятся. После этого тело будет совершать колебания только под действием вынуждающей силы с частотой изменения этой силы. Такие колебания называют **вынужденными**.

Решение уравнения (5.46) для достаточно больших временных периодов, при которых собственные колебания прекращаются ($t \gg \beta^{-1}$, где β — коэффициент затухания собственных колебаний), имеет вид

$$x = A \sin(\Omega t + \alpha_0). \quad (5.47)$$

Амплитуда вынужденных колебаний и начальная фаза определяются выражениями

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_0 = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (5.48)$$

Зависимость амплитуды от частоты колебаний называют **амплитудно-частотной характеристикой**, а зависимость начальной фазы от частоты — это **фазо-частотная характеристика**.

Из полученного результата следует, что при совпадении частоты Ω вынуждающей силы с собственной частотой ω_0

системы амплитуда вынужденных колебаний резко возрастает (рис. 5.11). Это явление называют **резонансом**⁹.

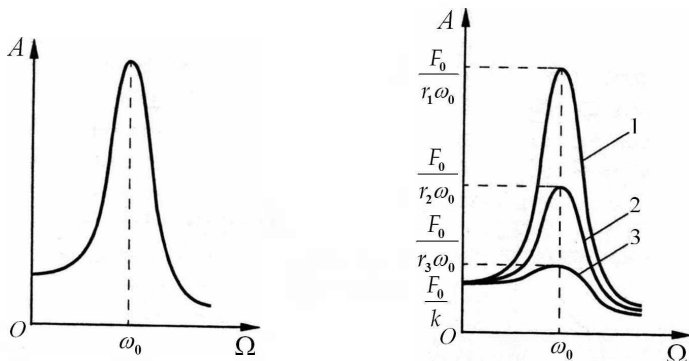


Рис. 5.11 (приведено по: Мякишев Г. Я., Синяков А. З. Физика. Колебания и волны. 11 класс. М.: Дрофа, 2001. С. 36)

Резонансные значения амплитуды и начальной фазы:

$$\Omega = \omega_0, \quad A = \frac{F_0}{r\omega_0}, \quad \alpha_0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Смещение и скорость колебательного движения при резонансе ($\Omega = \omega_0$) изменяются по законам

$$x = -\frac{F_0}{r\omega_0} \cos(\omega_0 t), \quad v_x = \dot{x} = \frac{F_0}{r} \sin(\omega_0 t). \quad (5.49)$$

Видим, что скорость тела изменяется в той же фазе, что и вынуждающая сила. Этот факт позволяет объяснить резкое возрастание амплитуды колебаний при резонансе. При $\Omega = \omega_0$ направление действия вынуждающей силы всегда совпадает с

⁹ Фактически при наличии силы сопротивления амплитуда колебаний достигает максимума на частоте $\Omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, которая несколько меньше как собственной частоты ω_0 , так и частоты затухающих колебаний $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Но мы рассматриваем случай малого коэффициента сопротивления, когда $\beta \ll \omega_0$. Поэтому полагаем $\Omega_c \approx \omega_0$.

направлением перемещения тела (так как фазы одинаковы). Следовательно, вынуждающая сила будет непрерывно совершать положительную работу, увеличивая механическую энергию колебаний. В этом случае амплитуда колебания начнет расти. При $\Omega \neq \omega_0$ вынуждающая сила на одних перемещениях колеблющегося тела совершает положительную работу, а на других — отрицательную, и поэтому амплитуды вынужденных колебаний невелики.

Из выражения (5.49) также следует, что меньшему сопротивлению среды соответствует большее резонансное значение амплитуды. На рис. 5.11 кривым 1, 2 и 3 соответствуют различные значения параметра сопротивления, причем они соотносятся как $r_1 < r_2 < r_3$. В консервативной системе, где сопротивление отсутствует, резонансная амплитуда будет бесконечно большой.

Рассмотрим амплитудно-частотную характеристику вблизи резонанса, когда частота вынуждающей силы Ω близка к собственной частоте колебаний ω_0 . В этом случае формула (5.48) заметно упрощается. Действительно, знаменатель выражения амплитуды преобразовывается следующим образом:

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 &= (\omega_0 - \Omega)^2(\omega_0 + \Omega)^2 \approx (\omega_0 - \Omega)^2 4\omega_0^2, \\ 4\beta^2 \Omega^2 &\approx 4\beta^2 \omega_0^2.\end{aligned}$$

Тогда выражение (5.48) для амплитуды будет иметь вид

$$A = \frac{F_0}{r\omega_0} L(\Omega). \quad (5.50)$$

Здесь

$$L(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0 - \Omega}{\beta}\right)^2 + 1}} \quad -$$

лоренцева функция. График этой функции (рис. 5.12) называется *лоренцевым контуром*.

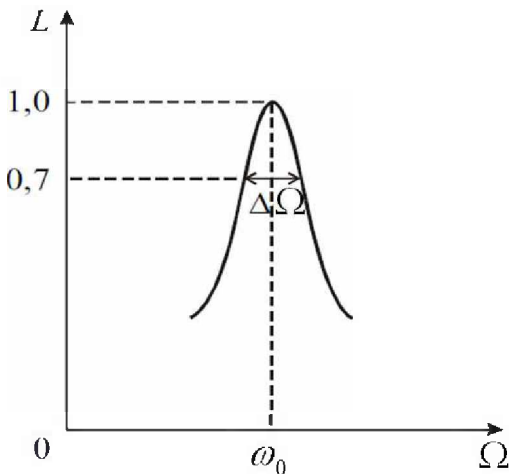


Рис. 5.12

Для количественной характеристики остроты резонанса используют понятие ширины контура:

$$\Delta\Omega = 2(\omega_0 - \Omega).$$

Величину $\Delta\Omega$ определяют из условия уменьшения в два раза энергии колебаний. Поскольку энергия колебательной системы пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, а сама амплитуда пропорциональна лоренцевой функции, уменьшению энергии вдвое соответствует следующее выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\Delta\Omega}{2\beta}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7.$$

Отсюда $\Delta\Omega = 2\beta$. Ширина лоренцева контура кроме остроты резонанса характеризует такой диапазон частот внешней силы,

для которых система эффективно откликается на воздействие этой силы. Этот диапазон частот называется **полосой пропускания**.

Добротность колебательной системы связана с полосой пропускания. Из выражения (5.42) следует:

$$Q = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega}. \quad (5.51)$$

Чем больше полоса пропускания, тем меньше добротность системы.

Проявление резонанса в науке и технике может быть как полезным, так и вредным. Явление резонанса широко используется в научных исследованиях, приборостроении, радиотехнике, медицине.

Отрицательная роль резонанса проявляется в технике и строительстве. Все строительные сооружения в той или иной степени обладают способностью совершать свободные колебания. Внешние периодические воздействия (сильные порывы ветра, работа вибрирующих установок и т. д.) могут привести к резонансу и последующему разрушению. Хорошо известен случай, произошедший в 1750 г. близ города Анжера во Франции. Через цепной мост длиной 102 м шел в ногу отряд солдат. Частота их шага совпала с собственной частотой свободных колебаний моста. В результате резонанса амплитуда колебаний моста увеличилась настолько, что цепи оборвались, и мост вместе с солдатами обрушился в реку; погибли 226 человек. В 1906 г. по тем же причинам обрушился мост в Петербурге, по которому проходил кавалерийский эскадрон. Поэтому войсковые части не ходят через мост в ногу, а для поездов устанавливают такие скорости, при которых частота ударов колес о стыки рельсов не совпадает с частотой свободных колебаний

моста. Определенные требования должны выполняться при проектировании и эксплуатации гидросооружений, вышек, зданий промышленных предприятий, в которых работает вибрирующее оборудование.

5.13. Механические волны

Любая материальная среда — твердое тело, жидкость или газ — обладает определенными упругими свойствами, т. е. способностью противодействовать процессам деформации растяжения, сжатия и сдвига. Если в результате внешнего воздействия в какой-то точке среды возникло возмущение (деформация), то, во-первых, за счет силы упругости среды в этой точке возникнут колебания, во-вторых, возникшие колебания не могут оставаться локализованными в этой точке и за счет взаимодействия между соседними участками среды будут распространяться во всех направлениях.

Процесс распространения механических колебаний в пространстве с течением времени называют *механической волной*. Поскольку механические волны возникают благодаря упругости среды, их часто называют *упругими волнами*.

Любая волна имеет конечную скорость распространения. Она не может мгновенно распространяться по всей среде. Чем дальше находится данная точка среды от источника колебаний, тем позже она начнет колебаться.

5.14. Поперечные и продольные волны

В зависимости от направления колебаний частиц среды различают поперечные и продольные упругие волны. Если один конец резинового шнура закрепить на вертикальной стенке, а

другой, натянув рукой, резко приподнять и вернуть в исходное положение, то вдоль шнура побежит волна. Малые участки шнура будут совершать колебательные движения перпендикулярно направлению распространения волны.

Механические волны, распространяющиеся перпендикулярно направлению колебаний частиц среды, называют поперечными волнами (рис. 5.13).

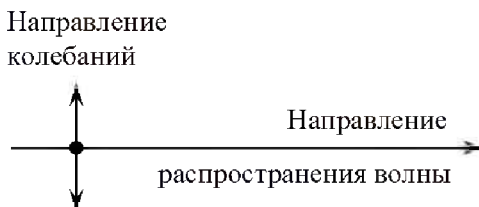


Рис. 5.13

Поперечные волны могут возникать только в средах, обладающих упругостью формы, т. е. в твердых телах и на свободной поверхности жидкости. В последнем случае напряжение сдвига обусловлено поверхностным натяжением жидкости. В газах и в объеме жидкости поперечные волны не возникают, так как отсутствуют напряжения сдвига (газ и жидкость легко принимают форму сосуда, в котором они находятся).

Рассмотрим другой пример. Если один конец пружины приставить к твердой поверхности, а по другому слегка резко ударить, то сразу после удара свободный конец пружины начнет сжиматься, затем под действием силы упругости — разжиматься, а соседний участок пружины — сжиматься. Такое чередование сжатий и растяжений начнет происходить вдоль всей пружины, т. е. вдоль пружины будет распространяться волна. В данном случае части пружины перемещаются вдоль направления распространения волны.

Механические волны, распространяющиеся вдоль направления колебаний частиц среды, называют *продольными волнами* (рис. 5.14).

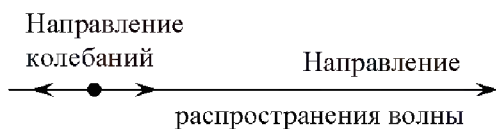


Рис. 5.14

Продольные упругие волны могут возникать в любых средах — твердых телах, жидкостях и газах.

Следует помнить, что каждая частица среды совершает колебательные движения относительно своего фиксированного положения равновесия. Поэтому *упругие волны не переносят вещество, они переносят только энергию колебательного движения частиц среды.*

5.15. Фаза, период, частота и длина волны

Любая точка среды, в которой распространяется механическая волна, совершает периодические колебания относительно своего положения равновесия, т. е. волна обладает периодичностью свойств во времени. Наблюдая за распространением волны, можно видеть, что в любой фиксированный момент времени существуют точки среды, которые движутся в одном направлении и одновременно проходят через положение равновесия. Это означает, что волна обладает периодичностью свойств в пространстве. На рис. 5.15 показано положение различных колеблющихся точек среды в один и тот же момент времени в поперечной упругой волне, распространяющейся вдоль оси OY .

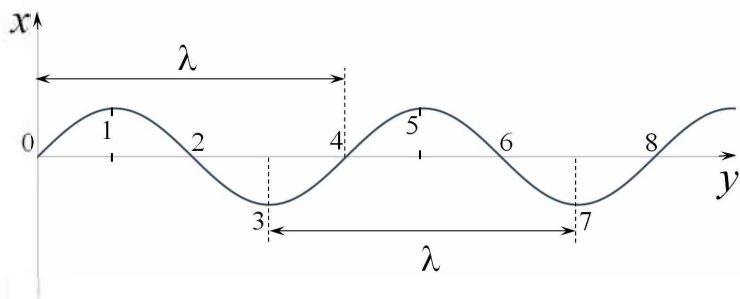


Рис. 5.15

Две точки среды колеблются в одинаковых фазах, если они, двигаясь в одном направлении, одновременно проходят положение равновесия и одновременно достигают одинаковых по модулю и знаку амплитудных смещений. На рис. 5.15 одинаковые фазы имеют точки 0–4, 1–5, 2–6, 3–7, 4–8. Сдвиг фаз для точек, совершающих колебания в одинаковых фазах, кратен 2π , т. е. $\Delta\varphi = 2k\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Две точки среды колеблются в противоположных фазах, если они, двигаясь в противоположных направлениях, одновременно проходят положение равновесия и одновременно достигают одинаковых по модулю, но противоположных по знаку амплитудных смещений. В противоположных фазах колеблются точки 0–2, 1–3, 2–4, 3–5, 4–6, 5–7, 6–8. Сдвиг фаз в этом случае составляет $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, ($k = 0, 1, 2, \dots$).

Совокупность всех точек среды, которые в данный момент времени колеблются в одинаковых фазах, образуют некоторую поверхность, называемую волновой. Волновую поверхность, отделяющую колеблющиеся частицы среды от частиц, еще не начавших колебаться, называют фронтом волны. Таким образом, фронт волны — это поверхность, через которую передается возмущение среды в данный момент времени. Нормаль,

восстановленная к волновому фронту в какой-либо его точке, показывает направление распространения волны в этой точке.

Если фронт волны имеет форму сферы, то такая волна называется *сферической*. Сферическая волна создается точечными источниками возмущений в однородных средах. Например, при взрыве в воздухе создается сферическая волна.

Если фронт волны имеет форму плоскости, то такая волна называется *плоской*. Плоская волна создается колебанием пластин больших размеров. На большом удалении от точечного источника возмущений среды часть сферической волновой поверхности приближенно можно считать плоской; при этом размеры выделенной поверхности должны быть малы по сравнению с расстоянием до источника.

Период T упругой волны — это период колебаний частиц среды.

Частотой ν волны называют величину, обратную периоду ($\nu = 1/T$) и равную числу полных колебаний, совершаемых отдельной частицей среды за одну секунду.

Длиной волны λ называют расстояние, на которое волна распространяется за время, равное одному периоду. Иначе эту величину можно определить как расстояние между двумя ближайшими точками среды, колеблющимися в одинаковых фазах.

5.16. Скорость распространения волны

В механике понятие скорости вводят для характеристики движения фиксированного материального объекта, например для характеристики быстроты изменения положения материальной точки в пространстве. В частности, средняя скорость движения тела за некоторый промежуток времени определяется как отношение перемещения этого тела к тому промежутку

времени, за который это перемещение произошло. В этом определении скорости предполагается, что мы измеряем положение одного и того же тела в разные моменты времени.

Когда речь идет о механической волне, скорость колебательного движения частиц среды, вызванного волной, вводится аналогичным образом. Но что такое скорость волны как процесса распространения колебаний частиц среды в пространстве с течением времени? Ведь в этом случае речь идет о движении разных частиц среды в разные моменты времени.

Если форма волны с течением времени не изменяется, то скоростью v волны называют скорость перемещения в пространстве какой-либо фазы этой волны, например гребня или впадины в поперечной волне, а также сгущения или разрежения в продольной волне. Таким образом, под скоростью волны понимают *фазовую скорость*. Как показывает расчет и подтверждает эксперимент, скорость волны значительно больше скорости колебательного движения частиц среды.

Поскольку длина волны λ определяется как расстояние, проходимое волной за время, равное одному периоду колебаний, величина скорости u волны такова:

$$u = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu. \quad (5.52)$$

где $\nu = 1/T$ — частота колебаний.

Скорость волны (фазовая скорость) равна произведению длины волны на частоту колебаний.

Опыт показывает, что при не слишком высоких частотах скорость волны в упругой среде не зависит от частоты колебаний, а определяется только физическими свойствами и состоянием среды. Согласно формуле (5.52) произведение длины волны на частоту колебаний в данной среде при данных усло-

виях есть величина постоянная, не зависящая ни от длины волны, ни от частоты колебаний. Зависимость скорости волны от частоты колебаний, проявляющаяся при высоких частотах, называется д и с п е р с и е й. Сохранение формы любой волны при ее распространении есть следствие отсутствия дисперсии. Это существенно упрощает расчет скорости волны.

Скорость u_t распространения поперечной волны в изотропном твердом теле зависит только от модуля сдвига G и плотности ρ тела:

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (5.53)$$

Скорость u_l распространения продольной волны в изотропном твердом теле зависит только от модуля упругости (модуля Юнга) E , коэффициента Пуассона μ и плотности ρ тела:

$$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}. \quad (5.54)$$

Сравним величины скоростей продольных и поперечных волн. Используя выражение (2.9), связывающее модуль сдвига с модулем упругости и коэффициентом Пуассона, получим

$$\frac{u_l}{u_t} = \sqrt{\frac{2(1 - \mu)}{1 - 2\mu}}. \quad (5.55)$$

Поскольку в зависимости от среды коэффициент Пуассона принимает значения в интервале $0 \leq \mu \leq 0,5$,

$$\sqrt{2} \leq \frac{u_l}{u_t} \leq \infty.$$

Следовательно, скорость распространения продольных волн всегда существенно больше скорости распространения поперечных волн. Этот факт широко используется в сейсмологии и гравитационной разведке. Измеряя скорости прохождения попереч-

ных и продольных волн, создаваемых искусственными взрывами, можно определить плотность и упругие свойства вещества (например, грунта), в котором они распространяются. Отсюда можно судить о составе и физической природе вещества.

Пусть проведены два искусственных взрыва на расстояниях l_1 и l_2 от наблюдателя. От места первого взрыва прибор зафиксирует два сигнала. Первый придет от продольной волны через время

$$t_{l1} = \frac{l_1}{u_l}.$$

Второй сигнал придет от поперечной волны через время

$$t_{t1} = \frac{l_1}{u_t}.$$

Измеряемый промежуток времени между сигналами от первого места взрыва составит:

$$\Delta t_1 = t_{t1} - t_{l1} = l_1 \frac{u_l - u_t}{u_l u_t}. \quad (5.56)$$

Аналогично промежуток времени между сигналами от второго места взрыва составит:

$$\Delta t_2 = t_{t2} - t_{l2} = l_2 \frac{u_l - u_t}{u_l u_t}. \quad (5.57)$$

Из полученных выражений можно вычислить скорости продольных и поперечных волн. Зная скорости, можно определить плотность грунта, модули упругости и сдвига, а отсюда уже делать выводы о составе, строении и свойствах грунта.

Скорость продольных волн в тонком стержне, поперечный размер которого во много раз меньше длины волны, такова:

$$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (5.58)$$

Скорость распространения продольных волн в газах определяется следующим выражением:

$$u = \sqrt{\gamma \frac{RT_t}{M}}, \quad (5.59)$$

где $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты (c_p , c_v — удельные теплоемкости газа при постоянных давлении и объеме соответственно, для воздуха $\gamma = 1,4$); R — молярная газовая постоянная; T_t — абсолютная температура (нижний индекс t поставлен, чтобы не путать с периодом колебаний); M — молярная масса газа.

В справочниках приводятся измеренные скорости упругих волн в различных средах. В газах скорость волны близка к средней скорости теплового движения молекул и составляет при нормальных условиях несколько сот метров в секунду: для воздуха — 340 м/с, для водорода — 1200 м/с. Скорость волн в жидкостях составляет от 1 до 2 км/с. Скорость упругих волн в твердых телах составляет 5 — 6 км/с, а в алмазе достигает рекордного значения — 18 км/с.

5.17. Бегущие и стоячие волны

Волна в бесконечной среде распространяется в одном направлении. Поэтому ее называют *бегущей волной*. В ограниченной среде бегущая волна отражается от препятствия. Если препятствие представляет собой плоскую поверхность, то в любой точке волнового поля происходит наложение бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Образуется так называемая *стоячая волна*. Обсудим подробнее бегущие и стоячие волны.

Бегущие волны

Получим формулу, описывающую колебания любой частицы среды при распространении гармонических колебаний. Пусть источник плоских волн совершает колебания по закону

$$s = A \sin(\omega t), \quad (5.60)$$

где s — смещение источника; A — амплитуда колебаний источника волн; ω — циклическая частота колебаний.

Пусть волна распространяется в направлении оси X . Начало координатной оси X совместим с точкой, относительно которой колеблется источник волн.

Рассмотрим точку среды, удаленную от источника волн на расстояние x . Так как волна распространяется с конечной скоростью u , то чем дальше отстоит данная точка среды от источника, тем больше времени требуется волне для того, чтобы достичь этой точки, и тем позже в ней начнутся колебания. Расстояние от источника до рассматриваемой точки волна преодолест за время

$$\tau = \frac{x}{u}. \quad (5.61)$$

Значит, τ — время запаздывания колебаний данной точки среды по сравнению с источником волн. Если предположить, что частота и амплитуда волны не изменяются, то рассматриваемая точка среды будет совершать колебательные движения по закону

$$s = A \sin[\omega(t - \tau)], \quad s = A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)\right]. \quad (5.62)$$

Полученная формула — это **уравнение плоской бегущей волны**, распространяющейся в положительном направлении оси X . Она описывает колебания любой точки среды, через которую проходит волна. Волна называется бегущей, потому

что гребень (впадина) поперечной волны или сжатие (растяжение) продольной волны перемещаются в заданном направлении. Если начальная фаза колебаний φ_0 источника не равна нулю, то уравнение бегущей волны запишется в виде

$$s = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (5.63)$$

Заметим, что уравнение (5.63) справедливо как для поперечных, так и для продольных волн. В первом случае смещение s происходит перпендикулярно направлению распространения волны, а во втором — параллельно ему.

Стоячие волны

Выше мы рассмотрели плоские волны, бегущие в неограниченной однородной среде. В действительности волны распространяются в частично или полностью ограниченных средах. Выясним, что происходит, когда на пути волны находится плоское однородное препятствие. Таковым может быть жесткая стенка или граница с другой средой. Очевидно, что падающая на препятствие волна отражается от него. Как происходит отражение волны? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим упругий шнур, один конец которого закреплен на стенке-препятствии, а свободный конец находится в руке наблюдателя. Если шнур натянуть, то созданный движением руки единичный импульс будет двигаться в сторону стенки (рис. 5.16, а).

Как только волна достигнет стенки, на закрепленный конец шнура со стороны соседней частицы будет действовать сила упругости, направленная вертикально вверх. Поскольку закрепленный конец шнура остается неподвижным, это означает, что на него со стороны стенки действует сила \mathbf{F} , компенсирующая силу упругости и направленная вдоль стенки вертикально вниз

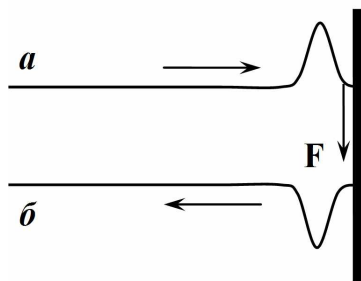


Рис. 5.16

(см. рис. 5.16, а). Эта сила порождает отраженную волну, имеющую отклонение в направлении, противоположном падающей волне (см. рис. 5.16, б). Действительно, если в падающей на стенку волне шнур изогнут вверх, то сила, действующая на закрепленный конец шнура со стороны жесткой стенки, направлена вниз, что соответствует направленному вниз удару. Таким образом, *падающая и отраженная от жесткой стенки волны имеют противоположные фазы*.

Опыт показывает, что частоты падающей и отраженной волн одинаковы. Амплитуды также можно считать приближенно одинаковыми, если пренебречь затуханием колебаний вдоль шнура.

Любая точка шнура совершает колебания, обусловленные волнами, бегущими в противоположных направлениях.

Направим ось X вдоль шнура в сторону закрепленного к стенке конца и выберем начало координат на свободном конце шнура. Пусть свободный конец шнура совершает гармонические колебания

$$s = A \sin(\omega t). \quad (5.64)$$

Рассмотрим колебания некоторой точки шнура с координатой x . Бегущая к стенке волна вызывает колебания этой точки

по закону

$$s_1 = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]. \quad (5.65)$$

Если длина шнура l , то волна пройдет от начала шнура до его конца и обратно до рассматриваемой точки путь $2l - x$. При отражении от стенки фаза волны изменяется на противоположную. Это означает, что смещения в отраженной волне направлены противоположно смещениям в падающей волне. Если пренебречь затуханием, то уравнение отраженной волны в точке с координатой x запишется в виде

$$s_2 = -A \sin \left[\omega \left(t - \frac{2l - x}{u} \right) \right]. \quad (5.66)$$

При одновременном распространении нескольких волн смещение частиц среды определяется векторной суммой смещений, вызываемых каждой волной в отдельности. Этот экспериментальный факт называют **принципом суперпозиции** волнового движения.

Согласно принципу суперпозиции результирующее смещение рассматриваемой точки шнура таково:

$$s = s_1 + s_2 = A \left\{ \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right] - \sin \left[\omega \left(t - \frac{2l - x}{u} \right) \right] \right\}. \quad (5.67)$$

Применив теорему о разности синусов, получим уравнение так называемой **стоячей волны**:

$$s = A_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{l}{u} \right) \right], \quad A_0 = 2A \sin \left(\omega \frac{l - x}{u} \right). \quad (5.68)$$

Здесь A_0 — амплитуда колебаний в стоячей волне, разная для разных точек шнура. Видно, что существуют неподвижные точки (амплитуда равна нулю, $A_0 = 0$). Их называют **узлами** стоячей волны. Точки, имеющие максимальную амплитуду колебаний, называют **пучностями** стоячей волны (рис. 5.17).

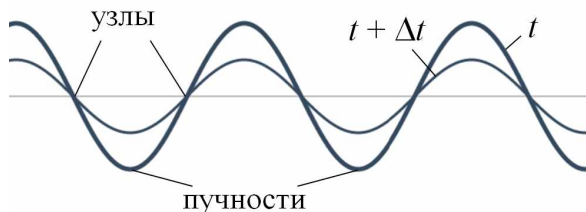


Рис. 5.17

Один из узлов находится на закрепленном конце шнура ($x = l$). Расстояния Δx между узлами определяются из условия

$$\frac{\omega \Delta x}{u} = \pi.$$

Отсюда

$$\Delta x = \frac{\pi u}{\omega} = \frac{uT}{2} = \frac{\lambda}{2}. \quad (5.69)$$

Пучности располагаются между узлами. Следовательно, *расстояние между узлами или пучностями равно половине длины волны.*

Особенность стоячей волны состоит в том, что она не перемещается вдоль шнура (поэтому ее и называют стоячей). Это связано с тем, что разность фаз двух колебаний от падающей и отраженной волн в любой точке шнура не изменяется с течением времени. При этом она разная в разных точках шнура. В результате распределение смещений точек шнура в любой момент времени образует волну, в которой положения узлов и пучностей не изменяются: узлы неподвижны [см. (5.68)], а пучности совершают поперечные колебания относительно положения равновесия.

Все точки между двумя соседними узлами в стоячей волне совершают колебания с разными амплитудами, но с одинаковой фазой. Таким образом, в любой фиксированный момент времени все точки между двумя соседними узлами смещаются в одном

направлении. Если рассмотреть два смежных участка шнура, разделенных общим узлом, то расположенные на разных участках точки шнура колеблются в противофазе, т. е. их смещения относительно положения равновесия направлены в разные стороны. При этом все точки шнура проходят через положение равновесия одновременно. На рис. 5.17 показана стоячая волна в разные моменты времени. Видно, что при переходе через узел фаза волны изменяется на π .

Еще раз обратим внимание на принципиальное различие между бегущей и стоячей волнами. В бегущей волне все точки среды совершают колебания с одинаковой амплитудой, но с различными фазами. В стоячей волне, напротив, точки между соседними узлами колеблются с одинаковой фазой, но с различными амплитудами. Кроме того, если точки среды в бегущей волне в общем случае (за исключением точек, колеблющихся в одинаковой фазе или противофазе) проходят положение равновесия в разные моменты времени, то в стоячей волне — одновременно.

Мы рассмотрели отражение упругой волны от жесткой стенки. Прямо противоположная картина наблюдается при отражении волны от свободной границы среды. Например, волна, бегущая вдоль находящегося в воздухе металлического стержня, доходит до его конца и отражается обратно, не изменяя фазу. Это происходит потому, что плотность воздуха много меньше плотности материала стержня, и движение частиц воздуха не оказывает никакого влияния на движение частиц стержня. Частицы металла на конце стержня будут двигаться почти так, как если бы стержень находился в вакууме. Действительно, любая частица стержня у его свободного конца не может быть сжата, так как нет силы, действующей на нее со стороны свободной границы. Смещение граничной частицы стержня вы-

зывает отраженную волну, бегущую от свободного конца. При этом амплитуда и фаза отраженной волны равны амплитуде и фазе падающей волны. Равенство амплитуд есть следствие закона сохранения энергии.

5.18. Собственные колебания струны

Рассмотрим колебания струны, натянутой между неподвижными зажимами, вызванные каким-то начальным возмущением. Такие колебания струны являются собственными, так как они обусловлены силами упругости самой струны.

В общем случае собственные колебания частиц струны будут периодическими, но не обязательно гармоническими. Однако при определенном начальном воздействии на струну эти колебания окажутся гармоническими, т. е. происходящими по закону синуса или косинуса.

Представим, что все участки струны в результате внешнего воздействия смещены относительно положения равновесия по синусоидальному закону так, как показано на рис. 5.18.

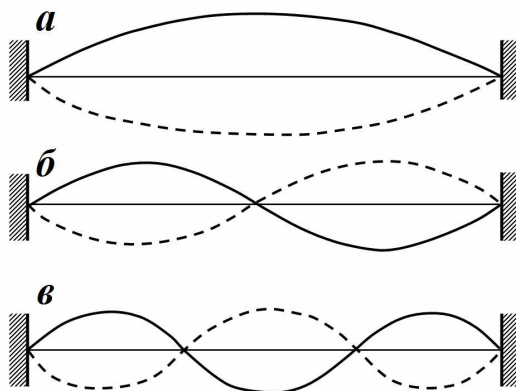


Рис. 5.18

Затем струну освободили. После этого возникают собственные гармонические колебания частиц струны, такие же, как и в стоячей волне. Действительно, точки закрепления струны окажутся узлами стоячей волны, а середина струны — пучностью. Все точки между узлами будут колебаться синфазно и одновременно проходить положение равновесия.

Пусть длина струны (расстояние между зажимами) равна l . Тогда, как видно из рис. 5.18, *а*, самая большая длина волны, возбуждаемая в струне, такова:

$$\lambda_1 = 2l.$$

После начального отклонения, показанного на рис. 5.18, *б*, струна будет совершать гармонические собственные колебания, возбуждаемые стоячей волной, длина которой равна расстоянию между зажимами:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} 2l = l.$$

Из начального положения, показанного на рис. 5.18, *в*, колебания частиц струны будут возбуждаться стоячей волной, длина которой

$$\lambda_3 = \frac{2l}{3}.$$

Аналогичные рассуждения могут быть продолжены для других начальных возмущений струны. Но уже можно прийти к следующему обобщению: поскольку расстояния между соседними узлами составляют половину длины волны, а концы струны закреплены, т. е. также являются узлами, на струне должно укладываться целое число полуволн. Таким образом, струна с закрепленными концами может совершать собственные гармонические колебания, соответствующие различным длинам волн:

$$\lambda_k = \frac{2l}{k}, \quad (5.70)$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ — целые числа.

Этому множеству *собственных длин волн* согласно формуле (5.52) соответствует множество *собственных частот*:

$$\nu_k = \frac{u}{\lambda_k} = \frac{u}{2l} k, \quad (5.71)$$

где u — скорость бегущей вдоль струны волны.

Наименьшая из собственных частот ν_1 называется *основной частотой*, или *основным тоном*. Другие собственные частоты, большие основной, называются *высшими гармониками*, или *обертонами*.

Мы рассмотрели синусоидальное возмущение струны. В общем случае в струне возбудится несколько собственных колебаний с различными собственными частотами. Сложное колебание определится согласно принципу суперпозиции наложением различных гармоник.

5.19. Интерференция волн

Вспомним принцип суперпозиции волнового движения. При одновременном распространении нескольких волн результирующее смещение частиц среды от положения равновесия представляет собой векторную сумму смещений, которые происходили бы при распространении каждой волны в отдельности. Другими словами, волны накладываются одна на другую, не искажая друг друга.

Особый интерес представляет наложение волн от источников, которые имеют одинаковые частоты; в этом случае сдвиг фаз между колебаниями не изменяется с течением времени и колебания происходят в одной плоскости. Такие источники называют *когерентными*. Созданные ими волны также называют когерентными.

Рассмотрим две когерентные волны, созданные источниками A и B (рис. 5.19).

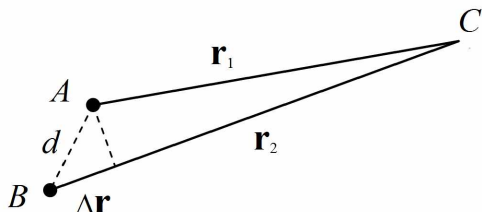


Рис. 5.19

Каков будет результат суперпозиции этих волн в данной точке пространства C , удаленной от источников на расстояния r_1 и r_2 соответственно? Расстояние между источниками равно d .

Если расстояния r_1 и r_2 от источников до точки наблюдения C много больше расстояния между источниками d , то в однородной среде амплитуды обеих волн будут почти одинаковыми в точке наблюдения. Кроме того, смещения точек среды, вызванные этими волнами, будут происходить практически вдоль одной прямой.

От источников A и B до точки наложения C волны пройдут разные пути. Величину $\Delta r = r_2 - r_1$ называют *геометрической разностью хода волн*.

Воспользуемся уравнением бегущей волны в виде (5.65). В точке наложения волн вызываемые ими смещения точек среды определяются следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} s_1 &= A \sin \left[\omega \left(t - \frac{r_1}{u} \right) \right] = A \sin \varphi_1, \\ s_2 &= A \sin \left[\omega \left(t - \frac{r_2}{u} \right) \right] = A \sin \varphi_2, \end{aligned} \quad (5.72)$$

где φ_1 и φ_2 — фазы волн в точке наблюдения.

В уравнениях (5.72) учтено, что частоты двух когерентных волн одинаковы ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) и скорости распространения волн

в одной и той же среде также одинаковы ($u_1 = u_2 = u$). Так как $\lambda = u/\nu = 2\pi u/\omega$, длины волн одинаковы ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Таким образом, сдвиг фаз между волнами в точке наложения составит:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega \left(t - \frac{r_1}{u} - t + \frac{r_2}{u} \right) = \omega \frac{\Delta r}{u} = 2\pi \frac{\Delta r}{\lambda}. \quad (5.73)$$

Результат суперпозиции волн зависит от разности фаз в точке наблюдения. Согласно формуле (5.73) разность фаз волн не изменяется с течением времени и определяется их геометрической разностью хода. Рассмотрим два частных случая.

Если геометрическая разность хода волн равна целому числу длин волн

$$\Delta r = k\lambda, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5.74)$$

то разность фаз кратна 2π . Это означает, что волны приходят в точку наблюдения в одинаковой фазе. Следовательно, амплитуды волн складываются, т. е. амплитуда результирующей волны в точке наблюдения удваивается и становится равна $2A$.

Теперь выясним, что произойдет, если на геометрической разности хода укладывается нечетное число полуволн, т. е.

$$\Delta r = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5.75)$$

В этом случае разность фаз кратна $(2k + 1)\pi$. Отсюда следует, что колебания, вызванные волнами в точке наблюдения, происходят в противофазе, и амплитуды этих колебаний будут вычитаться. Иначе говоря, в результате сложения колебаний амплитуда результирующего колебания равна нулю, и в точке наблюдения колебаний нет.

Если геометрическая разность хода имеет значение между λ и $\lambda/2$, то амплитуда результирующего колебания принимает промежуточное значение между удвоенной амплитудой взаимодействующих волн и нулем. Поскольку, согласно формуле

(5.73), сдвиг фаз волн в точке наблюдения от времени не зависит, в пространстве формируется стационарное распределение амплитуды результирующих колебаний.

Явление наложения нескольких волн, при котором в разных точках пространства формируется не зависящее от времени распределение амплитуды результирующих колебаний, называется *интерференцией* этих волн.

В частности, рассмотренная выше стоячая волна является результатом интерференции двух волн, бегущих в противоположные стороны.

Устойчивое распределение амплитуды результирующих колебаний в пространстве, обусловленное интерференцией волн, называют *интерференционной картиной*.

5.20. Дифракция волн

До сих пор мы рассматривали распространение волн в однородных средах или отражение бегущих волн от бесконечной плоской стенки с образованием стоячих волн. Как будет распространяться волна, если линейный размер d препятствия сравним по величине с длиной волны λ ?

Повседневные наблюдения свидетельствуют, что набегающая волна обладает способностью огибать небольшие препятствия. Так, например, бегущие по поверхности воды волны огибают выступающий из воды камень, проникая в область геометрической тени этого камня. Мы слышим гул автомобиля за углом здания, т. е. звуковые волны огибают угол.

Способность волн огибать предметы, размеры которых соизмеримы с длиной волны, называют *дифракцией*¹⁰.

¹⁰ От латинского *diffRACTus* — разломанный, преломленный.

Качественное объяснение явления дифракции волн основано на принципе Гюйгенса.

В 1690 г. голландский физик Х. Гюйгенс сформулировал принцип распространения волн в материальных средах. Согласно **принципу Гюйгенса** каждая точка среды, до которой доходит фронт волны, сама становится источником вторичных волн, огибающая которых (поверхность, касательная ко всем вторичным волнам) определяет положение волнового фронта в следующий момент времени.

Значение принципа Гюйгенса состоит в том, что с его помощью, зная положение волнового фронта в некоторый момент времени t и скорость распространения волны u , можно путем построения огибающей поверхности определить положение волнового фронта в любой последующий момент времени $t + \Delta t$.

Пусть, например, сферическая волна распространяется в однородной среде (рис. 5.20).

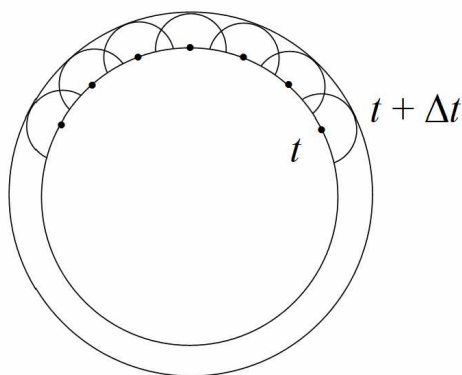


Рис. 5.20

Сечение сферической волновой поверхности плоскостью рисунка представляет собой окружность. Если начать отсчет вре-

мени в момент испускания волны точечным источником, то радиус рассматриваемой окружности будет равен ut . Точки среды, составляющие в момент времени t фронтальную сферическую поверхность волны, являются источниками вторичных волн. Поскольку среда однородная, эти вторичные волны также являются сферическими. За промежуток времени Δt каждая вторичная волна распространится в однородной среде на расстояние $u\Delta t$. Волновая поверхность в момент времени $t + \Delta t$ представляет собой геометрическую огибающую волновых поверхностей всех вторичных волн.

Явление дифракции — огибание волнами препятствий — можно наблюдать на следующем опыте. Рассмотрим набегание плоской волны A_1A_2 на экран с узкой щелью, размер которой d меньше длины волны λ (рис. 5.21).

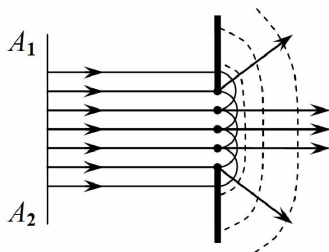


Рис. 5.21

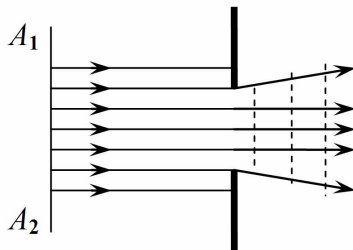


Рис. 5.22

Вторичные волны, создаваемые частицами среды на краях щели, проникают за экран, вследствие чего фронт волны искривляется (пунктирные линии), и волна проникает за экран в область геометрической тени. Мы наблюдаем дифракцию.

Проделаем этот же опыт, но при условии, что размер щели d существенно больше длины волны λ (рис. 5.22). В этом случае картина распространения волны за экраном будет иной. Волна

проходит сквозь щель, почти не меняя своей формы. Слабое отклонение от прямолинейного распространения волны можно наблюдать только вблизи краев щели.

Принцип Гюйгенса позволяет лишь качественно объяснить явление дифракции, но не дает его количественного описания. Например, на основе принципа Гюйгенса невозможно получить информацию об амплитуде колебаний в волне за преградой.

В 1818 г. французский физик О. Ж. Френель обобщил принцип Гюйгенса, учтя интерференцию вторичных волн. На основе **принципа Гюйгенса — Френеля** удалось количественно описать явление дифракции, в том числе распределение амплитуды колебаний частиц среды позади преграды.

Пространственное распределение амплитуды колебаний в точках, которые расположены позади преграды, называют *дифракционной картиной*.

Дифракционная картина зависит от соотношения между длиной волны λ , размером препятствия d и расстоянием L до точки наблюдения. Пусть для определенности препятствием является выпуклое тело (шарик, камень и т. п.). Если длина набегающей волны много больше размера препятствия, то волна его почти не замечает, т. е. распространяется так, как будто препятствия не существует. Если длина волны соизмерима с размером препятствия, то дифракция заметна даже на малом расстоянии L позади преграды, т. е. волна за преградой значительно слабее набегающей волны. Если же длина волны много меньше размера препятствия, то дифракционную картину можно наблюдать только на большом расстоянии L от преграды, величина которого зависит от значений λ и d .

5.21. Элементы акустики

Акустика¹¹ — раздел физики, в котором изучаются упругие колебания и волны от самых низких частот (от 0 Гц) до предельно высоких ($10^{11} - 10^{13}$ Гц), их взаимодействия с веществом. Хотя акустика возникла как учение о звуке, в настоящее время она охватывает широкий круг вопросов. В частности, прикладными областями общей акустики являются физическая акустика, атмосферная акустика, акустика в естественных средах, архитектурная акустика и строительная акустика.

Физическая акустика — учение об особенностях распространения акустических волн в различных материальных средах, взаимодействии их с веществом. Важным подразделом физической акустики является молекулярная акустика, связанная с молекулярной физикой и физикой твердого тела.

Распространение акустических волн в естественных средах (атмосфере, водной среде и земной коре) изучается в *атмосферной акустике*, *гидроакустике* и *геоакустике*.

Архитектурная акустика — раздел акустики о распространении звуковых волн в помещении, отражении и поглощении их поверхностями, влиянии отраженных волн на слышимость речи и музыки. Цель архитектурной акустики состоит в создании методов проектирования театральных и концертных залов, лекционных аудиторий, радиостудий и т. п. с требуемыми условиями слышимости.

Строительная акустика — область прикладной акустики по изучению вопросов защиты помещений, зданий и территорий населенных мест от шума. Основная задача строительной акустики состоит в разработке конструктивных элементов зданий

¹¹ От греческого *akustikos* — слуховой, слушающий.

(стен, кровель, межэтажных перекрытий), обладающих высокой степенью звукоизоляции от внешнего шума (создаваемого транспортом) и внутреннего шума (создаваемого водопроводом, канализацией, лифтами, работой телерадиоаппаратуры в жилых помещениях и т. п.).

5.22. Звуковые волны

В теории колебаний и волн термин «звуковые волны» употребляются в широком и узком смыслах. В широком смысле звуковыми, или акустическими, волнами называются распространяющиеся в упругой среде слабые возмущения — механические колебания с малыми амплитудами. В узком смысле — явление, субъективно воспринимаемое органом слуха человека и животных.

Принята следующая классификация звуковых волн в зависимости от частоты (или длины волны):

- инфразвук, частота 0 — 16 Гц;
- слышимый звук, частота 16 Гц — 20 кГц;
- ультразвук, частота 20 кГц — 10^3 МГц;
- гиперзвук, частота более 10^3 МГц.

Инфразвук, ультразвук и гиперзвук не воспринимаются органами слуха человека. Гиперзвук возможен, главным образом, в твердом теле и жидкости. В газах гиперзвук может возникнуть только при достаточно высоком давлении. Дело в том, что малые возмущения в газе передаются через столкновения молекул, поэтому средняя частота межмолекулярных столкновений должна быть больше частоты волны. В воздухе при нормальных условиях средняя частота столкновений молекул по порядку величины составляет 10^3 МГц, т. е. соответствует нижней границе гиперзвуковой частоты.

Источником звука могут служить любые явления, вызывающие локальное возмущение давления или механического напряжения. Любое тело, совершающее колебания, является источником звука в газе. Источником звука может быть не только твердое тело (например, колеблющаяся мембрана или струна), но и газ или жидкость (например, органная труба или вода в водопроводном кране). При этом механизм возникновения звука один и тот же, источник звука вызывает локальное возмущение давления среды, которое распространяется в виде волны по всей среде.

Звуки подразделяют на музыкальные тоны и шумы.

Музыкальный тон — звук определенной частоты, который создается гармонически колеблющимся телом.

Шум — сложный звук, образующийся в результате длительных непериодических колебаний различных источников звука (шум моря, деревьев, транспорта, толпы и т. д.). Все реальные звуки представляют собой шумы. Любой шум можно представить как суперпозицию музыкальных тонов с различными частотами.

Набор частот музыкальных тонов, присутствующих в звуке, называется его **акустическим спектром**. В шуме присутствуют музыкальные тоны всех частот в некотором диапазоне от ν' до ν'' . Говорят, что шум имеет сплошной акустический спектр.

Если сложный звук состоит из музыкальных тонов с дискретным набором частот ν_1, ν_2, ν_3 и т. д., то такой звук называют **тональным**. Акустический спектр тонального звука называют **линейчатым**.

Музыкальный тон, имеющий в линейчатом спектре наименьшую частоту ν_1 , называют **основным**. Тоны, соответствующие остальным частотам (ν_2, ν_3 и т. д.), называют **обертонами**.

Воспринимаемые звуки различают по высоте, тембру и громкости.

Высота тона определяется частотой звуковой волны: чем больше частота, тем выше тон.

Тональные звуки с одним и тем же основным тоном могут различаться тембром. *Тембр* определяется составом линейчатого акустического спектра, т. е. составом обертонов — их частотами и амплитудами.

Рассмотрим бегущую звуковую волну, распространяющуюся вдоль оси x со скоростью u . Если начальная фаза колебаний φ_0 источника не равна нулю, то уравнение такой волны имеет вид (5.63)

$$s = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (5.76)$$

Используя опыт вычисления энергии колебательного движения (см. подраздел 5.9), можно получить следующее выражение для энергии звуковой волны в единице объема среды, т. е. для объемной плотности звуковой энергии:

$$w = \rho A^2 \omega^2 \cos^2 \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \varphi_0 \right]. \quad (5.77)$$

Единицей измерения объемной плотности звуковой энергии в СИ является *джоуль на кубический метр* (Дж/м³).

Из полученного выражения следует, что энергия звуковой волны в любой фиксированной точке среды изменяется с течением времени и в любой фиксированный момент времени разная в разных точках среды. Другими словами, энергия звуковой волны является функцией координат и времени.

Поскольку среднее значение $\cos^2 \alpha$ равно $1/2$, средняя за период колебаний объемная плотность энергии звуковой волны в каждой точке среды определяется следующим выражением:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2. \quad (5.78)$$

Пусть \mathbf{u} — вектор, модуль которого равен фазовой скорости волны u , а направление совпадает с направлением распространения волны. Тогда величина вектора

$$\mathbf{j} = w\mathbf{u} \quad (5.79)$$

характеризует плотность потока энергии, т. е. энергию, переносимую звуковой волной за единицу времени через единичную поверхность, ориентированную перпендикулярно направлению распространения волны. Этот вектор был введен русским физиком Н. А. Умовым и называется **вектором Умова**. Плотность потока энергии в СИ измеряется в *ваттах на квадратный метр* (Вт/м^2).

Интенсивностью \mathbf{I} звуковой волны в данной точке называют среднее по времени значение вектора Умова:

$$\mathbf{I} = \langle \mathbf{j} \rangle = \langle w \rangle \mathbf{u}. \quad (5.80)$$

Очевидно, что существует минимальное значение интенсивности, при котором человек начинает воспринимать звук.

Наименьшую интенсивность звуковых волн, которая вызывает у человека ощущение звука, называют *порогом слышимости*. Порог слышимости существенно зависит от частоты звука. Наибольшей чувствительностью ухо человека обладает к звуковым волнам с частотами от 1 до 4 кГц. В этом диапазоне частот порог слышимости составляет в среднем около 10^{-12} Вт/м^2 .

При больших интенсивностях, порядка $1 - 10 \text{ Вт/м}^2$, волна перестает восприниматься органами слуха как звук, вызывая ощущение боли. Такое значение интенсивности называется

порогом болевого ощущения. Порог болевого ощущения также зависит от частоты звука. Но эта зависимость существенно более слабая, чем у порога слышимости.

С интенсивностью звуковой волны связана характеристика, называемая громкостью звука. Громкость звука пропорциональна интенсивности, но в отличие от последней является субъективной характеристикой звука, т. е. зависит от индивидуального восприятия его человеком. Один и тот же звук воспринимается разными людьми по-разному в зависимости от индивидуальных особенностей органов слуха.

Из соотношений (5.78) и (5.80) следует, что громкость пропорциональна квадрату амплитуды колебаний точек среды в звуковой волне: чем больше амплитуда колебаний, тем громче звук.

Как уже было сказано, чувствительность органов слуха, а следовательно, и громкость звука зависят от его частоты.

Субъективной характеристикой громкости является величина L , которая называется *слуховым ощущением*. Пусть I — интенсивность данного звука, а I_0 — порог слышимости. Согласно эмпирическому **закону Вебера — Фехнера** слуховое ощущение определяется формулой

$$L = a \lg \frac{I}{I_0}, \quad (5.81)$$

где значение множителя a связано с единицами измерения слухового ощущения. В этой формуле порог слышимости обычно принимают равным 10^{-12} Вт/м², так что в интервале частот от 1 до 4 кГц порогу слышимости соответствует нулевое слуховое ощущение ($L = 0$).

За единицу слухового ощущения в СИ принят *бел* (Б). Однако чаще используют единицу в десять раз меньшую — *децибел* (дБ). В этом случае $a = 10$ дБ.

Слуховое ощущение, воспринимаемое человеком, имеет значения от 0 дБ (порог слышимости) до 130 дБ (порог болевого ощущения). В табл. 5.1 приведены значения слухового ощущения для некоторых звуков.

Таблица 5.1

Звук	L , дБ
Тиканье часов	20
Шепот на расстоянии 1 м	30
Тихий разговор	40
Речь средней громкости	60
Громкая речь	70
Крик	80
Шум самолетного двигателя на расстоянии 5 м	120

5.23. Акустический резонанс

Рассмотрим систему, представляющую собой закрытую с одного конца трубу, в которой содержится воздух. Другой конец трубы закрыт поршнем. Создадим в воздухе некоторое возмущение. Например, сожмем внезапно воздух поршнем, а затем вернем его в начальное положение и закрепим. В результате возникнут *собственные колебания* воздуха в трубе. Образуется стоячая волна, узлы которой будут находиться на закрытых концах трубы. Здесь очевидна аналогия с собственными колебаниями струны, закрепленной на концах. Поэтому для определения спектра собственных частот колебаний воздуха в трубе воспользуемся результатами подраздела 5.18. Поскольку труба

закрыта с двух сторон, спектр собственных частот определится формулой (5.71)

$$\nu_k = \frac{u}{\lambda_k} = \frac{u}{2l} k, \quad (5.82)$$

где u — скорость звука; l — длина трубы.

Если труба открыта с одного конца, то у открытого конца образуется пучность смещений. Поэтому при колебаниях основной частоты ν_1 на длине трубы укладывается четверть длины волны. При других колебаниях на длине трубы всегда будет укладываться нечетное число четвертей длин волн. Спектр собственных частот колебаний воздуха в открытой с одного конца трубе есть

$$\nu_k = \frac{u}{4l} (2k - 1). \quad (5.83)$$

Источник звука может совершать как свободные, так и вынужденные колебания под действием внешней периодической силы.

Когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебаний источника, возникает акустический резонанс.

Явление акустического резонанса обычно демонстрируют с помощью двух одинаковых камертонов, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. Если внешним источником звука оказывается один из камертонов, то на другой камертон будет действовать периодическая сила, частота которой равна собственной частоте камертона. В результате второй камертон также начинает излучать звуковую волну той же частоты. Вследствие акустического резонанса амплитуда колебаний второго камертона будет достаточно большой.

В духовых музыкальных инструментах (орган, флейта, саксофон и т. д.) под действием воздушной струи возбуждаются колебания с частотой, близкой к собственной частоте колебаний

воздуха в трубе. Регулируя длину трубы, можно возбуждать колебания той или иной частоты.

5.24. Рассеяние звука на препятствии

Отражение упругих волн от плоской бесконечной стенки рассматривалось в подразделе 5.17, здесь же мы обсудим влияние размера препятствия на звуковую волну.

Характер явлений, наблюдаемых при встрече звуковых волн с препятствием, зависит в том числе и от соотношения между размерами последнего и длиной звуковой волны. Если размеры препятствия много больше длины волны, звук отражается зеркально, т. е. угол отражения равен углу падения волны. Если же размеры препятствия сравнимы с длиной волны, наблюдается явление дифракции, т. е. звук огибает препятствие.

Рассмотрим следующий численный пример. Пусть частота звука $\nu = 20$ кГц, что соответствует нижней границе ультразвукового диапазона. Волна распространяется в воздухе, температура которого равна 15°C . Расчет по формуле (5.59) дает следующее значение скорости распространения звука в воздухе: $u = 340$ м/с. Тогда длина волны $\lambda = u/\nu = 17$ мм.

Поскольку большинство обычных препятствий (стены зданий, перегородки и т. п.) имеют значительно большие размеры, чем эта длина звуковой волны, происходит зеркальное отражение звука.

Пусть теперь частота звуковой волны $\nu = 20$ Гц, что является низкочастотной границей слышимого звука. Повторяя приведенный выше расчет длины волны, получим $\lambda = 17$ м.

Такие волны в обычных условиях огибают большинство препятствий.

Хорошо известное явление имеет место при отражении звука от препятствия, отражающая поверхность которого перпендикулярна направлению распространения звуковой волны. В этом случае звуковая волна возвращается к источнику звука. Данное явление называется эхом.

Слух человека обладает способностью сохранять звуковое ощущение в среднем в течение 0,1 с после прекращения действия звука на барабанную перепонку. Поэтому для того, чтобы ухо было способно услышать эхо, время прохождения звуковой волны до преграды и обратно должно быть не меньше 0,1 с, что возможно лишь тогда, когда расстояние до отражателя достаточно велико.

Оценим это расстояние l от источника звука до преграды.

Время прохождения звуковой волны до препятствия и обратно

$$t = \frac{2l}{u},$$

где u — скорость звука в данной среде.

Отсюда минимальное расстояние до преграды, начиная с которого можно услышать в воздухе эхо, составляет:

$$l = \frac{ut}{2}, \quad l = \frac{340 \cdot 0,1}{2} \text{ м} = 17 \text{ м}.$$

Здесь мы учли, что скорость звука в воздухе при температуре 15 °С такова: $u = 340 \text{ м/с}$.

В закрытых помещениях происходит многократное отражение звука от стен и потолка, что увеличивает продолжительность восприятия звука после прекращения его излучения источником. Такое остаточное звучание в закрытых помещениях называют реверберацией. Временем реверберации, т. е. временем послезвучания, называют такой промежуток времени,

в течение которого звук еще слышен после того, как его источник перестал колебаться.

Время реверберации сильно влияет на качество звука в больших помещениях (в концертных залах, в лекционных аудиториях), поэтому при их строительстве принимают специальные меры для достижения необходимого в данных условиях значения этого времени.

5.25. Поглощение звука

Колеблющиеся индивидуальные частицы упругой среды совершают работу, в частности, против сил внутреннего трения, которые связаны со сдвиговой вязкостью среды η . В результате энергия колебаний каждой частицы убывает с течением времени и превращается во внутреннюю энергию среды. При этом температура упругой среды увеличивается.

Уменьшение механической энергии какой-либо системы с течением времени за счет ее преобразования в другие (немеханические) формы энергии называется *диссипацией энергии*, а сами системы — *диссипативными*.

Таким образом, механическая энергия колебательного движения частиц упругой среды диссипируется в тепло. При этом уменьшение амплитуды колебаний описывается формулой (5.35). Преобразование звука в тепло используют в медицине для прогрева внутренних тканей тела. Если высокочастотные электрические поля (УВЧ) прогревают ткани, наилучшим образом проводящие электрический ток, то ультразвуковая терапия, напротив, эффективна для прогрева плохо проводящих ток тканей (сухожилия, надкостница).

Кроме сдвиговой вязкости существуют и другие физические механизмы диссипации колебательной энергии. Обсудим два наиболее существенных из них.

Звуковые волны связаны с адиабатическим сжатием индивидуальных частиц упругой среды, в которой эти волны распространяются. Избыточное давление, возникающее в результате внезапного изменения сжатия, постепенно уменьшается до тех пор, пока в элементе объема среды не установится равновесное давление, соответствующее этому сжатию. Этот процесс называется *р е л а к с а ц и е й д а в л е н и я*. Механизм релаксации легко понять при распространении звука в многоатомных газах. Многоатомные молекулы обладают тремя поступательными степенями свободы, так как с помощью трех координатных осей задается направление поступательного движения молекулы как целого. Кроме того, эти молекулы обладают внутренними степенями свободы, которые связаны с вращательным и колебательным движением атомов, составляющих молекулу. При внезапном сжатии элемента объема газа давление определяется энергией поступательного движения молекул. В дальнейшем за счет столкновений между молекулами часть энергии их поступательного движения передается на внутренние степени свободы, стремясь к равномерному распределению энергии между ними. Поэтому при сжатии элемента объема газа переданная ему полная энергия уменьшается, переходя во внутреннюю энергию молекул. Следовательно, уменьшается и давление газа в этом элементе объема. Релаксация давления при всестороннем сжатии элемента объема газа характеризуется величиной ξ , которая называется *коэффициентом объемной вязкости*. Он имеет ту же размерность, что и коэффициент сдвиговой вязкости η , в СИ $\xi = 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$. Поскольку время релаксации конечно, изменение

давления будет отставать по фазе от сжатия среды, что ведет к диссипации звуковой энергии, т. е. к ее поглощению.

Важное значение имеет термический механизм поглощения звука. Например, в продольной звуковой волне места сжатия среды чередуются с местами разрежения. Поскольку деформация элементов объема упругой среды происходит адиабатически, области сжатия имеют повышенную температуру, а области разрежения — пониженную температуру по сравнению со средней температурой среды. Поэтому звуковой волне сопутствует тепловой поток, стремящийся выровнять температуры элементов объема среды. Теплообмен между смежными участками осуществляется в основном за счет теплопроводности среды. Таким образом, при механических колебаниях совершается положительная работа, приводящая к перераспределению внутренней энергии между различными элементами объема упругой среды и, следовательно, к диссипации энергии колебательного движения.

Мы выяснили, что наличие вязкости и теплопроводности упругой среды приводит к диссипации энергии звуковых волн, к их постепенному затуханию. Коэффициент затухания β , входящий в формулу (5.35), определяет закон уменьшения интенсивности звука в фиксированной точке среды с течением времени. Однако на практике приходится иметь дело с уменьшением интенсивности звука вдоль направления его распространения. Поэтому поглощением звуковых волн называют их распространение в однородной среде, сопровождающееся диссипацией энергии за счет вязкости и теплопроводности среды.

Амплитуда A и интенсивность I плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси OX , зависят от координаты x по экспоненциальному закону

$$A(x) = A_0 e^{-\beta x}, \quad I(x) = I_0 e^{-2\beta x}, \quad (5.84)$$

где A_0 и I_0 — амплитуда и интенсивность в точке $x = 0$ (например, вблизи источника звука); $e = 2,7183\dots$ — основание натуральных логарифмов; β — коэффициент поглощения.

Для продольных волн в газах и жидкостях

$$\beta = \frac{\omega^2}{2\rho u^2} \left(\frac{4}{3} \eta + \xi + \lambda \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} \right), \quad (5.85)$$

где ω и u — циклическая частота и скорость звуковой волны; ρ , η , ξ и λ — плотность, сдвиговая вязкость, объемная вязкость и коэффициент теплопроводности среды; c_p и c_v — удельные теплоемкости среды в изобарном и изохорном процессах.

Формула (5.85) справедлива при условии малого относительного уменьшения амплитуды волны на расстоянии порядка длины волны, т. е. при $\beta u / \omega \ll 1$.

Заметим, что коэффициент поглощения пропорционален квадрату частоты. Это означает, что звуки более высокой частоты поглощаются больше. В сложном звуке прежде всего исчезают высшие гармоники, в то время как низшие гармоники распространяются со сравнительно малым затуханием. Например, в большом концертном зале ясно ощущается обеднение тембра скрипки, если перейти из первых рядов партера на галерку.

Из формулы (5.85) также следует, что коэффициент поглощения обратно пропорционален плотности среды. Это означает большее поглощение звука в менее плотной среде.

Известно, что наибольшее поглощение звука происходит при его отражении от какого-либо препятствия. Это объясняется тем, что вблизи отражающей поверхности скорость и температура газа или жидкости, где распространяется звук, испытывают наибольшие изменения в зависимости от расстояния до

отражающей стенки. Следовательно, диссипативные свойства среды (вязкость и теплопроводность) проявляются больше всего именно вблизи граничной поверхности. Если звук распространяется в области, размер которой сопоставим с толщиной пограничного слоя газа или жидкости (например, вдоль узкого капилляра), то его поглощение происходит примерно одинаково по всему объему среды. Именно так поглощается звук в порах акустической штукатурки.

Поглощение звука не является главной причиной ослабления его интенсивности. Если бы не было расхождения в стороны и рассеяния на препятствиях, то звук голоса частотой 100 – 150 Гц при распространении в атмосфере ослабел бы вдвое по амплитуде только после прохождения расстояния, равного 60 км. Громкий разговор в Санкт-Петербурге можно было бы услышать в Москве по прошествии получаса, требующегося для преодоления звуком этого расстояния.

5.26. Особенность акустики помещений

Звуковые волны в закрытых помещениях, многократно отражаясь от границ, образуют сложное поле колебательного движения воздуха. В этом случае законы акустики определяются не только свойствами источника звука, но и размерами, формой помещения и способностью стен, потолка и пола поглощать и рассеивать акустическую энергию.

Таким образом, звуковые поля в закрытом помещении и в свободном пространстве существенно различаются. В частности, в свободном поле интенсивность звука есть средний за период поток мощности в направлении распространения волны, и эта интенсивность является энергетической характеристикой поля бегущей волны. Для звукового поля в помещении поня-

тие интенсивности теряет смысл, поскольку в каждый момент времени существуют потоки мощности различных направлений, и в некоторых случаях они компенсируются, тогда как в этот момент уровень звуковых колебаний воздуха в данной точке пространства может достигать значительной величины.

Вместо величины «интенсивность звука» для оценки акустического поля помещений используют величину «поток звуковой мощности, падающей на единицу площади со всех направлений полупространства». Эту величину называют *удельной мощностью облучения границ*.

Универсальной энергетической характеристикой звукового поля является *плотность акустической энергии*, определяющая как поле закрытого объема, так и поле бегущих волн. В свободном пространстве плотность акустической энергии убывает с расстоянием и пропорциональна акустической мощности источника. Применительно к звуковому полю помещения эта закономерность не выполняется. В некоторых случаях плотность акустической энергии в помещении не зависит от расстояния до источника (если не включать небольшую область вблизи источника), иногда с увеличением расстояния плотность акустической энергии может увеличиваться. Плотность акустической энергии помещений зависит не только от акустической мощности источника, но и от акустических свойств помещений.

Контрольные вопросы

1. Что такое свободные колебания?
2. Что называют периодом колебаний?
3. Что называют частотой колебаний?
4. Какие колебания называют гармоническими?
5. Что определяют амплитуда и фаза колебаний?

6. Как соотносятся между собой фазы смещения скорости и ускорения?
7. Как энергия колебательного движения связана с его амплитудой?
8. Как соотносятся между собой частоты смещения и кинетической энергии колебаний?
9. Что является причиной затухания свободных колебаний?
10. Что такое добротность колебательной системы?
11. Какие колебания называют вынужденными?
12. В чем состоит явление резонанса при механических колебаниях?
13. Как определяется ширина лоренцева контура?
14. Что характеризует ширина лоренцева контура?
15. Что представляет собой механическая волна?
16. Какие волны относятся к поперечным, а какие — к продольным?
17. Что называют длиной волны?
18. Что такое скорость распространения волны?
19. Какими физическими величинами определяются скорости поперечных и продольных волн?
20. Как образуются стоячие волны?
21. Что такое узлы и пучности стоячей волны?
22. Какие волны называют когерентными?
23. В чем состоит явление интерференции волн?
24. В чем состоит явление дифракции волн?
25. В чем состоит принцип Гюйгенса?
26. Что такое музыкальные тоны и шум?
27. Что такое основная частота звука и обертоны?
28. Чем определяется тембр звука?
29. Что такое интенсивность звука?
30. Что такое порог слышимости?

31. В чем состоит явление акустического резонанса?
32. Как образуется эхо?
33. Что такое реверберация?
34. Какие свойства упругой среды определяют поглощение звука?

Примеры решения задач

Задача 5.1

Тело совершает колебания по закону $x = 0,3 \sin [\pi(t + 0,5)]$ м. Найдите амплитуду, период, начальную фазу колебаний и ускорение в момент времени $t = 0,5$ с.

Решение

Сравним закон колебаний тела, данный условием задачи, с общим уравнением гармонических колебаний

$$x = A \sin (\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.86)$$

Отсюда следует:

амплитуда $A = 0,3$ м, циклическая частота $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$,

период $T = 2\pi/\omega = 2$ с, начальная фаза $\varphi_0 = 0,5\pi$.

Используя выражение (5.8) для ускорения в момент времени $t = 0,5$ с, получим:

$$a_x = -\omega_0^2 x = -0,3\pi^2 \sin \pi \frac{\text{м}}{\text{с}} = 0 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5.87)$$

Задача 5.2

Колебания материальной точки происходят относительно положения равновесия по закону $x = A \sin \omega t$ с периодом 12 с. Определите, за какой наименьший промежуток времени t_1 точка удалится от положения равновесия на расстояние, равное

половине амплитуды. За какой промежуток времени t_2 она пройдет оставшуюся часть пути до максимального отклонения?

Решение

По условию задачи в момент времени t_1 смещение точки равно $A/2$:

$$\frac{A}{2} = A \sin \omega t_1, \quad \text{или} \quad \sin \omega t_1 = \frac{1}{2}. \quad (5.88)$$

Следовательно,

$$\omega t_1 = \frac{\pi}{6}, \quad \text{или} \quad \frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6}, \quad (5.89)$$

откуда

$$t_1 = \frac{T}{12} = 1 \text{ с.}$$

Расстояние от положения равновесия до положения максимального смещения материальная точка проходит за четверть периода. Поэтому

$$t_2 = \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = 2 \text{ с.}$$

Задача 5.3

Шарик массой 10 г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 0,2$ м и периодом $T = 4$ с. В начальный момент времени смещение шарика относительно положения равновесия максимально. Найдите кинетическую и потенциальную энергию шарика в момент времени $t = 1$ с.

Решение

Общее уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x = A \sin (\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.90)$$

По условию задачи в начальный момент времени смещение шарика относительно положения равновесия максимально, $x(t=0) = A$, откуда

$$\sin \varphi_0 = 1, \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Закон колебаний шарика:

$$x = A \sin \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2} \right) = A \cos \omega t, \quad x = 0,2 \cos \frac{\pi}{2} t \text{ м.} \quad (5.91)$$

Потенциальная энергия шарика определится по формуле (5.28), которая с учетом $k = m\omega^2 = m(2\pi/T)^2$ запишется в виде

$$E_n = \frac{m}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \left(0,2 \cos \frac{\pi}{2} t \right)^2, \quad E_n(t = 1 \text{ с}) = 0 \text{ Дж.} \quad (5.92)$$

Поскольку при $t = 1$ с потенциальная энергия колебательного движения равна нулю, в этот момент времени шарик проходит через положение равновесия, где его кинетическая энергия максимальна и равна полной механической энергии (5.26):

$$E_k = E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{mA^2}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2, \quad E_k = 4,9 \cdot 10^{-4} \text{ Дж.} \quad (5.93)$$

Задача 5.4

В U -образной трубке находится столбик жидкости длиной l . При кратковременном изменении давления жидкости в одном из колен уровни жидкости в сосуде изменились, и столбик начал колебаться. Определите частоту колебаний, пренебрегая трением жидкости о стенки сосуда.

Решение

Ось x направим вертикально вверх. За начало отсчета примем положение равновесия жидкости (рис. 5.23).

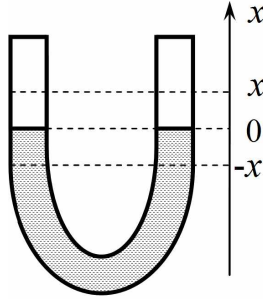


Рис. 5.23

Предположим, что давление увеличилось в левом колене сосуда так, что уровень жидкости в нем опустился до отметки $-x$, а в правом — соответственно поднялся на высоту x . Если плотность жидкости равна ρ , то избыточное давление столбика жидкости высотой $2x$ в правом сосуде составит $p = 2x\rho g$ (g — ускорение свободного падения). Сила давления

$$F = pS = \rho g 2xS, \quad (5.94)$$

где S — площадь поперечного сечения трубки.

Тогда уравнение движения столбика жидкости будет иметь вид

$$ma_x = -\rho g 2xS, \quad a_x = -\frac{2g}{l} x, \quad (5.95)$$

где $m = \rho Sl$ — масса жидкости в сосуде. Знак минус берется потому, что сила давления направлена в сторону, противоположную смещению.

Поскольку проекция ускорения связана с частотой выражением (5.8)

$$a_x = -\omega^2 x,$$

с учетом (5.95) частота колебаний жидкости в сосуде такова:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{l}}.$$

Задача 5.5

Тело массой m подвешено на двух пружинах одинаковой длины, но с разными упругими свойствами. Коэффициенты упругости пружин равны k_1 и k_2 . Пренебрегая массами пружин, определите частоту колебаний тела в двух случаях: 1 — пружины соединены с телом параллельно; 2 — пружины соединены последовательно (рис. 5.24).

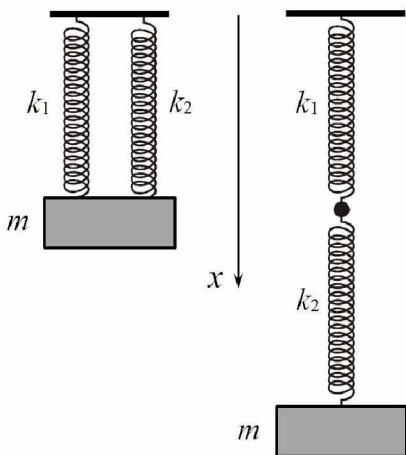


Рис. 5.24

Решение

Рассмотрим случай 1

В положении равновесия тела сила тяжести скомпенсирована суммой сил упругости пружин:

$$mg = (k_1 + k_2)x_0,$$

где x_0 — деформация каждой пружины при равновесии тела.

При отклонении от положения равновесия на величину x на тело действует дополнительная сила упругости

$$F = -(k_1 + k_2)x,$$

которая приводит его в колебательное движение. Уравнение движения тела имеет вид

$$ma_x = -(k_1 + k_2)x, \quad \text{или} \quad a_x = -\frac{k_1 + k_2}{m}x. \quad (5.96)$$

Отсюда частота колебаний такова:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}. \quad (5.97)$$

Рассмотрим случай 2

Пусть x_{10} и x_{20} — деформации пружин, когда тело находится в положении равновесия. При этом сила тяжести тела уравновешена силой упругости второй пружины, а силы, действующие между пружинами, равны по величине (так как массами пружин мы пренебрегаем):

$$k_2x_{20} = mg, \quad k_1x_{10} = k_2x_{20}, \quad x_0 = x_{10} + x_{20}, \quad (5.98)$$

где x_0 — общая деформация пружин.

Уравнения (5.98) позволяют определить растяжения пружин при равновесии тела.

Пусть x_1 и x_2 — смещения пружин относительно положений равновесия x_{10} и x_{20} соответственно. Тогда на тело действует сила упругости второй пружины $F_2 = -k_2x_2$. Уравнение движения тела имеет вид

$$ma_x = -k_2x_2. \quad (5.99)$$

Полное смещение тела складывается из деформаций обеих пружин:

$$x = x_1 + x_2.$$

Так как массами пружин мы пренебрегаем и пружины неподвижны относительно друг друга, по третьему закону динамики силы упругости одинаковы по величине:

$$k_1 x_1 = k_2 x_2.$$

Из двух последних уравнений имеем

$$x_2 = \frac{k_1 x}{k_1 + k_2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение движения (5.99), получим

$$ma_x = -\frac{k_2 k_1}{(k_1 + k_2)m} x. \quad (5.100)$$

Отсюда определяем частоту колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2 k_1}{(k_1 + k_2)m}}. \quad (5.101)$$

Задача 5.6

Два бруска массами m_1 и m_2 соответственно связаны пружиной жесткости k . Пружина удерживается в сжатом состоянии при помощи двух нитей, как показано на рис. 5.25.

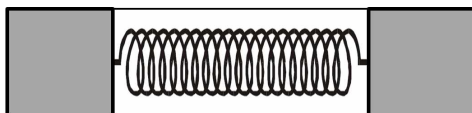


Рис. 5.25

Нити пережигают. Определите период колебаний брусков, пренебрегая массой пружины.

Решение

Пусть l — длина недеформированной пружины, l_1 и l_2 — расстояния от первого и второго бруска до центра масс системы. Положение центра масс определится из двух очевидных уравнений

$$m_1 l_1 = m_2 l_2, \quad l = l_1 + l_2, \quad (5.102)$$

где первое уравнение представляет собой условие равновесия системы относительно центра масс.

Обозначим через x и y смещения первого и второго брусков в случае, когда пружина сжата. Тогда условие равновесия запишется в виде

$$m_1(l_1 - x) = m_2(l_2 - y)$$

или, с учетом (5.102),

$$m_1 x = m_2 y. \quad (5.103)$$

Пружина сжата на величину

$$\Delta l = x + y = \frac{m_1 + m_2}{m_2} x.$$

Величина силы, с которой пружина действует на первый брусок, определяется законом Гука:

$$F = k \Delta l = k \frac{m_1 + m_2}{m_2} x. \quad (5.104)$$

Уравнение движения бруска:

$$m_1 a_{1x} = -k \frac{m_1 + m_2}{m_2} x. \quad (5.105)$$

Отсюда частота и период колебаний таковы:

$$\omega = \sqrt{k \frac{m_1 + m_2}{m_2 m_1}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_2 m_1}{k(m_1 + m_2)}}. \quad (5.106)$$

Очевидно, что второй брусок будет совершать колебания с теми же частотой и периодом.

Задача 5.7

Представим себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. За какое время тело, брошенное в эту шахту, достигнет центра Земли? Сопротивление движению тела отсутствует.

Решение

Пусть M и R — масса и радиус Земли, а m — масса брошенного в шахту тела.

Координатную ось OX направим вдоль шахты, а начало координат совместим с центром Земли.

Закон всемирного тяготения для тела на поверхности Земли таков:

$$F = G \frac{Mm}{R^2}, \quad (5.107)$$

где G — гравитационная постоянная.

Считая Землю однородным шаром с плотностью ρ , можем записать

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho. \quad (5.108)$$

В любой точке шахты с координатой x ($x \leq R$) на тело действует сила

$$F = G \frac{4}{3} \pi x^3 \rho \frac{m}{x^2} = G \frac{Mm}{R^3} x = gm \frac{x}{R}, \quad (5.109)$$

где $g = GM/R^2$ — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Проекция вектора силы на ось OX :

$$F_x = -mg \frac{x}{R}. \quad (5.110)$$

Здесь знак минус показывает, что сила направлена противоположно смещению.

Уравнение движения тела:

$$ma_x = -mg \frac{x}{R}. \quad (5.111)$$

Мы получили уравнение незатухающих гармонических колебаний. Это означает, что брошенное в шахту тело под действием силы тяжести совершает колебательное движение относительно центра Земли. Частота и период колебаний таковы:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (5.112)$$

Время движения тела до центра Земли составляет четверть периода:

$$t = \frac{1}{4}T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (5.113)$$

Если принять радиус Земли равным $6,4 \cdot 10^6$ м, а ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, то время движения тела (t) до центра Земли составит приблизительно 21 мин.

Задача 5.8

Закрепленная на концах струна длиной l растянута силой f . К середине струны прикреплен точечный груз массой m . Определите период малых колебаний груза. Массой струны пренебречь, силу тяжести не учитывать.

Решение

Выберем координатную ось OX перпендикулярно натянутой струне, а начало координат совместим с положением равновесия груза (рис. 5.26).

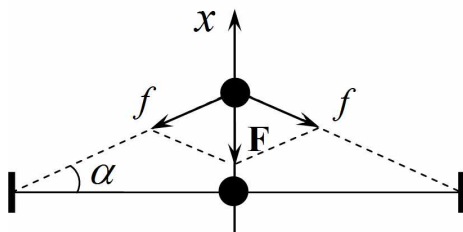


Рис. 5.26

Пусть x — смещение груза относительно положения равновесия. При этом на груз действует результирующая сила, проекция которой на ось OX (см. рис. 5.26) составляет:

$$F_x = -2f \sin \alpha. \quad (5.114)$$

Согласно условию задачи мы рассматриваем малые колебания. Поэтому угол α отклонения струны от положения равновесия мал. Синус малого угла можно приближенно представить в виде

$$\sin \alpha \approx \frac{2x}{l}.$$

Тогда для силы имеем

$$F_x = -4\frac{f}{l}x. \quad (5.115)$$

Уравнение движения груза:

$$ma_x = -4\frac{f}{l}x. \quad (5.116)$$

Отсюда частота и период колебаний таковы:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{f}{ml}}, \quad T = \pi\sqrt{\frac{ml}{f}}. \quad (5.117)$$

Задача 5.9

Система совершает затухающие гармонические колебания. Определите, сколько колебаний совершит система, прежде чем их амплитуда уменьшится в $100e$ раз ($e = 2,7183$), если в e раз амплитуда уменьшается за 5 колебаний.

Решение

Амплитуда затухающих гармонических колебаний имеет вид (5.35)

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}, \quad (5.118)$$

где β — коэффициент затухания.

Если T — период колебаний, то за промежуток времени t система совершит $N = t/T$ колебаний. Обозначим через N_0 количество колебаний, при котором амплитуда уменьшается в e раз. Это происходит за промежуток времени $t_0 = N_0 T$. Тогда из формулы (5.118) имеем

$$\beta = \frac{1}{t_0} = \frac{1}{N_0 T}. \quad (5.119)$$

При уменьшении амплитуды колебаний в $100e$ раз

$$\frac{A_0}{A} = e^{\beta t} = e^{\frac{t}{N_0 T}} = e^{\frac{N}{N_0}} = 100e. \quad (5.120)$$

Отсюда

$$\frac{N}{N_0} = \ln 100 + 1, \quad N = N_0 (\ln 100 + 1). \quad (5.121)$$

По условию задачи $N_0 = 5$. Тогда $N = 28$.

Задача 5.10

Амплитуда затухающих колебаний осциллятора за время τ уменьшилась вдвое. Как за это время изменилась механическая

энергия осциллятора? За какое время его энергия уменьшилась вдвое?

Решение

Механическая энергия осциллятора пропорциональна квадрату амплитуды колебаний (5.26): $E \sim A^2$. Если амплитуда за время τ уменьшилась в два раза, то энергия уменьшилась в четыре раза.

Амплитуда затухающих колебаний осциллятора определяется формулой (5.118). Тогда для энергии имеем

$$\frac{E_0}{E} = \frac{A_0^2}{A^2} = e^{2\beta t}, \quad \ln \frac{E_0}{E} = 2\beta t. \quad (5.122)$$

Мы выяснили, что при $t = \tau$ энергия уменьшилась в четыре раза:

$$\ln 4 = 2 \ln 2 = 2\beta\tau, \quad \beta = \frac{\ln 2}{\tau}.$$

Если энергия изменилась в два раза, то из (5.122) имеем

$$\ln 2 = 2\beta t = 2\frac{\ln 2}{\tau}t. \quad (5.123)$$

Отсюда время уменьшения энергии осциллятора вдвое таково: $t = \tau/2$.

Задача 5.11

Маленький шарик подвешен на нити длиной $l = 1$ м к потолку вагона. При какой скорости вагона шарик будет особенно сильно колебаться под действием ударов колес о стыки рельсов? Длина рельса $S = 12,5$ м.

Решение

Шарик совершает вынужденные колебания с частотой ν , равной частоте ударов колес о стыки рельсов:

$$\nu = \frac{v}{S}.$$

Если подвешенный на нити шарик считать математическим маятником, то период его собственных колебаний определяется формулой Гюйгенса (5.19):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Частота собственных колебаний шарика:

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.124)$$

Амплитуда колебаний шарика максимальна при резонансе, когда частота вынуждающей силы равна собственной частоте маятника:

$$\nu = \nu_0, \quad \frac{v}{S} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (5.125)$$

Отсюда скорость вагона должна быть такой:

$$v = \frac{S}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad v = 6,2 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5.126)$$

Задача 5.12

Источник частотой 1 000 Гц и амплитудой 0,5 мм возбуждает в упругом шнуре волны длиной $\lambda = 0,35$ м. Найдите скорость распространения колебаний u и максимальную скорость колебаний частиц среды v_m .

Решение

Скорость волны определяется произведением длины волны на частоту колебаний:

$$u = \lambda\nu, \quad u = 350 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5.127)$$

Максимальная скорость частиц шнура:

$$v_m = A\omega = A2\pi\nu, \quad v_m = 3,14 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5.128)$$

Таким образом, скорость волны (фазовая скорость) более чем в 100 раз превышает максимальную скорость колебаний частиц шнура.

Задача 5.13

На расстоянии $S = 1068 \text{ м}$ от наблюдателя ударяют молотком по железнодорожному рельсу. Наблюдатель, приложив ухо к рельсу, услышал звук на время $\Delta t = 3 \text{ с}$ раньше, чем он дошел до него по воздуху. Найдите скорость звука u в стали, если в воздухе скорость звука $v = 340 \text{ м/с}$.

Решение

Время хода волны в стали

$$t_1 = \frac{S}{u}.$$

Время хода волны в воздухе

$$t_2 = \frac{S}{v}.$$

Запаздывание звука в воздухе составляет:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = S \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right).$$

Отсюда скорость звука в стали

$$u = \frac{Sv}{S - v\Delta t}, \quad u = 7565 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (5.129)$$

Задача 5.14

По поверхности озера бегут волны со скоростью $u = 2 \text{ м/с}$. Моторная лодка движется навстречу волнам со скоростью $v = 5 \text{ м/с}$. С какой частотой волны бьются о борт лодки, если поплавок на поверхности воды колеблется с частотой $\nu_0 = 5 \text{ Гц}$?

Решение

Частота колебаний поплавка характеризует частоту волны. Расстояние между ближайшими гребнями волны (длина волны)

$$\lambda = \frac{u}{\nu_0}.$$

По правилу Галилея сложения скоростей в системе отсчета, связанной с лодкой, гребни пробегают мимо лодки со скоростью

$$v_1 = v + u.$$

Минимальный промежуток времени между ударами волн о нос лодки (период)

$$T = \frac{\lambda}{v_1} = \frac{\lambda}{v + u}.$$

Тогда частота ударов такова:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{v + u}{\lambda} = \frac{v + u}{u} \nu_0, \quad \nu = 1,75 \text{ Гц}. \quad (5.130)$$

Задача 5.15

Волна распространяется со скоростью $u = 720 \text{ м/с}$ при частоте источника $\nu = 600 \text{ Гц}$. Определите разность фаз колебаний в двух точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x = 0,2 \text{ м}$.

Решение

Уравнение бегущей волны (5.62) запишем для каждой точки среды:

$$s_1 = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x_1}{u} \right) \right], \quad s_2 = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x_2}{u} \right) \right].$$

Разность фаз колебаний в рассматриваемых точках такова:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\omega}{u}(x_1 - x_2), \quad \Delta\varphi = \frac{\omega}{u} \Delta x = \frac{2\pi\nu}{u} \Delta x. \quad (5.131)$$

Подставляя численные значения величин, получим

$$\Delta\varphi = \pi/3$$

Задача 5.16

Смещение из положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 4 см от источника колебаний, через промежуток времени $T/6$ равно половине амплитуды. Найдите длину волны.

Решение

Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$ и $\lambda = uT$, запишем уравнение волны (5.62) в виде

$$s = A \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x}{\lambda} \right). \quad (5.132)$$

По условию задачи

$$\frac{A}{2} = A \sin \left(\frac{2\pi T}{6T} - \frac{2\pi \cdot 0,04}{\lambda} \right).$$

Отсюда аргумент синуса равен $\pi/6$, т. е.

$$\frac{\pi}{3} - \frac{0,08\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{6}.$$

Следовательно, $\lambda = 0,48$ м.

Задача 5.17

Расстояние между второй и шестой пучностями стоячей волны составляет 20 см. Определите длину волны.

Решение

По условию задачи $\Delta x = x_6 - x_2$, где x_6 и x_2 — расстояния от источника колебаний до шестой и второй пучности стоячей волны. Но расстояние от источника до n -й пучности связано с длиной волны соотношением

$$x_n = \frac{2n\lambda}{4}.$$

Тогда

$$x_6 = 3\lambda, \quad x_2 = \lambda, \quad \Delta x = 2\lambda,$$

откуда

$$\lambda = \frac{\Delta x}{2}, \quad \lambda = 0,1 \text{ м}.$$

Задача 5.18

Найдите собственные частоты колебаний воздушного столба в закрытой с обоих концов трубе, имеющей длину $l = 3,4$ м. Температура воздуха в трубе 15°C , его молярная масса $M = 0,029$ кг/моль, показатель адиабаты $\gamma = 1,4$.

Решение

Спектр собственных частот колебаний столба газа в закрытой трубе определяется выражением (5.82):

$$\nu_k = \frac{u}{2l} k.$$

Скорость звука в газе (5.59)

$$u = \sqrt{\gamma \frac{RT_t}{M}},$$

где T_t — температура воздуха по шкале Кельвина.

Численный расчет дает

$$u = 340 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad \nu_k = k \cdot 50 \text{ Гц}.$$

Задача 5.19

Над цилиндрическим сосудом высотой $l = 1$ м звучит камертон, имеющий собственную частоту колебаний $\nu = 340$ Гц. В сосуд медленно наливают воду. При каких положениях уровня воды в сосуде звучание камертона значительно усиливается? Скорость звука в воздухе $u = 340$ м/с.

Решение

Спектр собственных частот колебаний воздуха в открытой с одного конца трубе (5.83) таков:

$$\nu_k = \frac{u}{4l}(2k - 1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Звучание камертона усиливается в момент, когда частота собственных колебаний воздушного столба в цилиндре совпадает с частотой камертона (акустический резонанс). Следовательно, возможные положения уровня воды в сосуде, определяемые расстоянием от поверхности воды до верхнего края сосуда, соответствуют

$$l_k = \frac{2k - 1}{4} \frac{u}{\nu},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

При $l = 1$ м возможны два положения уровня воды: $l_0 = 25$ см и $l_1 = 75$ см.

Глава 6

ФОТОМЕТРИЯ

Фотометрией¹² называется раздел оптики, в котором рассматриваются методы измерения световой энергии, переносимой электромагнитными волнами оптического диапазона (длиной от 10^{-9} до 10^{-3} м).

В приложениях фотометрии существенна не только объективная характеристика интенсивности света, но и мера его воздействия на глаз наблюдателя. Поэтому вводятся субъективные характеристики света: световой поток, сила света, освещенность, светимость, яркость.

Как известно, внутри оптического диапазона выделяют *видимое* (длина волны 0,38 — 0,78 мкм), *инфракрасное* (0,78 — 1000 мкм) и *ультрафиолетовое* (0,001 — 0,38 мкм) излучение. Поэтому действие оптического излучения на глаз наблюдателя зависит от спектральной чувствительности глаза. Так, например, тело, нагретое до 400 °С, является интенсивным источником инфракрасных лучей, но эти лучи невидимы, и интенсивность их зрительного восприятия равна нулю. Разные волны видимого света будут восприниматься одним и тем же наблюдателем по-разному, и один и тот же свет разные наблюдатели будут воспринимать также по-разному. Поэтому в фотометрии приходится вводить как объективные

¹² *Photos* (греч.) — свет.

(энергетические), так и субъективные (визуальные) единицы измерения.

6.1. Углы

Напомним, что в геометрии и ее приложениях принято различать три типа углов: плоский угол, двугранный угол и телесный угол (рис. 6.1).

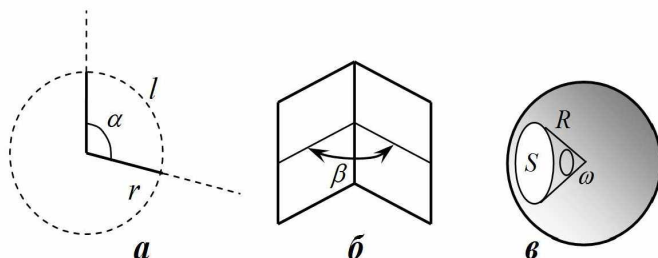


Рис. 6.1

П л о с к и й у г о л — геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми, исходящими из одной точки плоскости (см. рис. 6.1, *а*). В частности, *центральный угол* α образован двумя радиусами окружности. Единицей измерения плоского угла в СИ является один *радиан* (рад) — центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу. Таким образом, радианная мера угла определяется как отношение длины дуги l , на которую опирается центральный угол, к радиусу окружности r :

$$\alpha = \frac{l}{r}. \quad (6.1)$$

Д в у г р а н н ы й у г о л — геометрическая фигура, образованная двумя пересекающимися плоскостями (см. рис. 6.1, *б*). Линию пересечения плоскостей называют *ребром*. Мерой дву-

гранного угла является плоский угол β , стороны которого перпендикулярны ребру и расположены в разных плоскостях данного двугранного угла.

Телесный угол — часть пространства, ограниченная конической поверхностью (см. рис. 6.1, в). Единицей измерения телесного угла ω в СИ является один *стерадиан* (ср) — телесный угол, вершина которого находится в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь S , равную квадрату радиуса этой сферы R . Произвольный телесный угол в стерадианах составляет:

$$\omega = \frac{S}{R^2}. \quad (6.2)$$

Телесный угол ω_0 , существующий вокруг точки, т. е. опирающийся на всю поверхность сферы, $S = 4\pi R^2$, называют *полным телесным углом*. Его величина, очевидно, такова:

$$\omega_0 = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ ср.}$$

6.2. Световой поток

Объективной энергетической характеристикой излучения является, как известно, *мощность излучения* — световая энергия, переносимая через некоторую поверхность в единицу времени. Единицей измерения этой величины в СИ является *ватт* (Вт) — энергия в один джоуль, переносимая излучением за одну секунду. Мощность излучения регистрируется прибором.

В практике художника, дизайнера, архитектора и в обыденной жизни тоже важно знать не только мощность излучения, измеряемую прибором, но и мощность светового потока, воспринимаемую глазом наблюдателя. Для оценки световой энергии

по зрительному восприятию используют физическую величину *световой поток*, Φ .

Световым потоком называют световую энергию, оцениваемую по зрительному восприятию, которая переносится через некоторую поверхность за единицу времени.

Если ΔW — световая энергия, воспринимаемая глазом наблюдателя, которая переносится через какую-либо поверхность за промежуток времени Δt , то световой поток определится следующим соотношением:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}. \quad (6.3)$$

Если за любые равные промежутки времени через поверхность переносится одна и та же световая энергия, то световой поток

$$\Phi = \frac{W}{t}. \quad (6.4)$$

За единицу измерения светового потока в СИ принят *люмен* (лм). Определение этой единицы мы дадим ниже, после того, как введем понятие «сила света».

6.3. Сила света

Световой поток создается источником света. Главной энергетической характеристикой источника света является субъективная физическая величина, называемая силой света, I .

Силой света (I) источника называется отношение создаваемого им светового потока $\Delta\Phi$ к телесному углу $\Delta\omega$, в котором этот поток распространяется от источника:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\omega}. \quad (6.5)$$

Проще всего силу света можно вычислить для так называемого *точечного источника*. Источник света называется точечным, если он равномерно излучает свет по всем направлениям и имеет размеры значительно меньшие того расстояния, на котором оценивается его действие. Разумеется, эта модель является идеализацией реальных источников света, но она существенно упрощает решение задач фотометрии.

Сила света от точечного источника распределена изотропно, т. е. одинаково по всем направлениям, поэтому она равна отношению полного светового потока Φ_0 , распространяющегося по всем направлениям от точечного источника, к величине полного телесного угла:

$$I = \frac{\Phi_0}{4\pi}. \quad (6.6)$$

За единицу силы света в СИ принята *кандела* (кд), выступающая основной фотометрической единицей. Решениями XI и XIII Генеральных конференций по мерам и весам кандела была принята одной из семи основных единиц СИ. Она воспроизводится с помощью специального эталонного источника света. Кандела представляет собой силу света, испускаемого с поверхности площадью $1/600\,000\text{ м}^2$ полного излучателя в перпендикулярном направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины (2042 К) при давлении 101 325 Па. Отметим, что ранее эту единицу силы света называли *свечой* (св).

Все остальные фотометрические единицы являются производными. В частности, для светового потока имеем

$$\Phi = I \cdot \omega.$$

Отсюда очевидно определение люмена — единицы измерения светового потока:

$$1 \text{ лм} = 1 \text{ кд} \cdot 1 \text{ ср.}$$

Один люмен — это световой поток, излучаемый источником света силой одна кандела внутри телесного угла в один стерadian.

6.4. Освещенность

Для оценки световой энергии, попадающей за единицу времени на освещаемую поверхность, введена физическая величина, называемая освещенностью, E .

Освещенность (E) — это величина, равная отношению светового потока $\Delta\Phi$, падающего на некоторую поверхность, к площади ΔS этой поверхности:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (6.7)$$

Если световой поток распределен по освещаемой поверхности равномерно, то

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (6.8)$$

Единицей освещенности в СИ является *люкс* (лк) — освещенность, создаваемая световым потоком один люмен, равномерно распределенным по поверхности площадью один квадратный метр.

Для измерения больших освещенностей применяют также внесистемную единицу *фот* (фт), которая определяется как световой поток, приходящийся на один квадратный сантиметр

площади освещаемой поверхности:

$$1 \text{ фг} = \frac{1 \text{ лм}}{1 \text{ см}^2} = 1 \cdot 10^4 \text{ лк.}$$

6.5. Светимость

Обычно на практике приходится иметь дело не с точечными источниками света, а с излучателями конечных размеров. Для оценки световой энергии, испускаемой светящейся поверхностью, используют понятие светимости, R .

Светимостью (R) называют отношение светового потока $\Delta\Phi$, излучаемого с элемента поверхности площадью ΔS , к величине этой площади:

$$R = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (6.9)$$

Если любые одинаковые элементы поверхности излучают одинаковый световой поток, то

$$R = \frac{\Phi}{S}. \quad (6.10)$$

За единицу светимости в СИ принят *люмен на квадратный метр* (лм/м²).

Заметим, что величины освещенности E и светимости R определяются по одинаковым формулам, но первая величина характеризует световой поток, падающий на поверхность от источника света, а вторая — световой поток, испускаемый светящейся поверхностью.

6.6. Яркость

Светимость характеризует световой поток, испускаемый единицей поверхности по всем направлениям. Для оценки све-

тового потока, излучаемого светящейся поверхностью в определенном направлении, используют понятие яркости.

Рассмотрим излучение света элементом поверхности площадью S в направлении α в телесный угол ω (рис. 6.2).

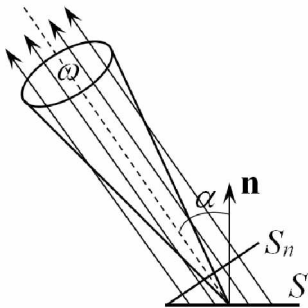


Рис. 6.2

Пусть S_n — проекция светящейся площадки S на плоскость, перпендикулярную направлению излучения. Как видно из рисунка, двугранный угол между площадками S и S_n равен углу α между направлением нормали \mathbf{n} к площадке S и направлением наблюдения. Тогда

$$S_n = S \cos \alpha. \quad (6.11)$$

Яркость B характеризует световой поток, излучаемый единичной площадкой в направлении α в единичный телесный угол, т. е.

$$B = \frac{\Phi}{\omega S_n} = \frac{\Phi}{\omega S \cos \alpha}. \quad (6.12)$$

Используя выражение для силы света

$$I = \frac{\Delta \Phi}{\Delta \omega},$$

получим

$$B = \frac{I}{S \cos \alpha}. \quad (6.13)$$

Следовательно, яркость численно равна силе света, излучаемого единичной поверхностью в перпендикулярном к ней направлении.

За единицу яркости в СИ принят *нит* (нт) — яркость такой плоской равномерно светящейся поверхности, с каждого квадратного метра которой в перпендикулярном к ней направлении излучается сила света в одну канделу:

$$1 \text{ нт} = 1 \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}.$$

Для измерения больших яркостей используется также внесистемная единица — *стильб* (сб) — кандела с квадратного сантиметра:

$$1 \text{ сб} = 1 \frac{\text{кд}}{\text{см}^2} = 10^4 \text{ нт}.$$

Например, яркость безлунного ночного неба составляет около $1 \cdot 10^{-4}$ нт, яркость видимой поверхности Солнца — около $1,5 \cdot 10^9$ нт, а средняя яркость полной Луны — примерно $1 \cdot 10^3$ нт.

Источники света с яркостью более $1,6 \cdot 10^5$ нт вызывают в глазу болезненные ощущения.

6.7. Законы освещенности

Наблюдения показывают, что освещенность, создаваемая точечным источником света, зависит от силы света этого источника, расстояния от источника до освещаемой поверхности и угла падения световых лучей. Углом падения называют угол

между падающим на поверхность лучом и перпендикуляром к этой поверхности, восстановленным в точке падения луча.

Пусть E_0 — освещенность поверхности при перпендикулярном падении на нее световых лучей, а E — освещенность этой же поверхности при неперпендикулярном их падении.

Рассмотрим точечный источник света с силой света I . Проведем вокруг него сферу радиуса r (рис. 6.3).

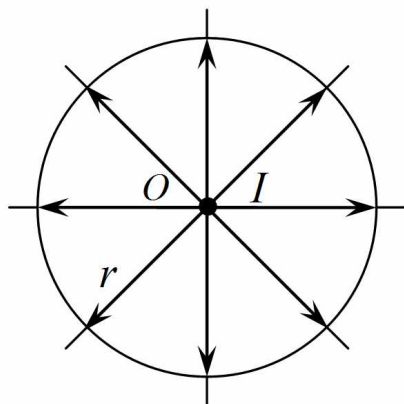


Рис. 6.3

Поскольку свет от точечного источника распространяется по всем направлениям одинаково, освещенность внутренней поверхности сферы также везде одинакова, и лучи света падают на нее по радиусам, т. е. с нулевым углом падения. В этом случае освещенность внутренней поверхности сферы

$$E_0 = \frac{\Phi_0}{S}, \quad (6.14)$$

где Φ_0 — полный световой поток; S — площадь внутренней поверхности сферы

$$\Phi_0 = 4\pi I, \quad S = 4\pi r^2.$$

Отсюда

$$E_0 = \frac{I}{r^2}. \quad (6.15)$$

Формула (6.15) выражает **первый закон освещенности**: освещенность поверхности лучами, падающими на нее перпендикулярно, пропорциональна силе света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника до освещаемой поверхности.

Далее выясним зависимость освещенности от угла падения световых лучей на поверхность.

Пусть на плоскость $ABCD$ лучи света падают перпендикулярно, а если ее убрать, то тот же световой поток упадет на плоскость $ABEF$ под углом α (рис. 6.4).

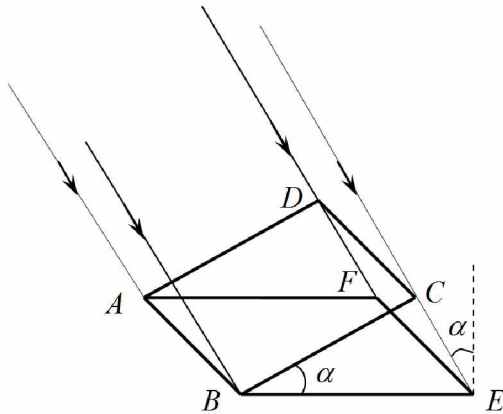


Рис. 6.4

Освещенность площадки $ABCD$

$$E_0 = \frac{\Phi}{S} = \frac{\Phi}{|AB||BC|}. \quad (6.16)$$

Освещенность площадки $ABEF$

$$E = \frac{\Phi}{|AB||BE|}. \quad (6.17)$$

Разделив вторую формулу на первую, получим

$$E = \frac{|BC|}{|BE|} = \cos \alpha. \quad (6.18)$$

Отсюда следует связь между освещенностями площадок:

$$E = E_0 \cos \alpha. \quad (6.19)$$

Формула (6.19) выражает **второй закон освещенности**: освещенность поверхности пропорциональна косинусу угла падения лучей света на эту поверхность.

С увеличением угла падения лучей на поверхность освещенность уменьшается, а при $\alpha = \pi/2$ она становится равной нулю.

Подставив (6.15) из первого закона освещенности в формулу (6.19), получим *обобщенный закон освещенности*:

$$E = \frac{I}{r^2} \cos \alpha. \quad (6.20)$$

Следует помнить, что этот закон точно выполняется для точечных источников света. Для реальных источников он выполняется тем точнее, чем меньше размеры источника и больше его расстояние до освещаемой поверхности.

Контрольные вопросы

1. Что такое объективные и субъективные фотометрические величины?
2. Что такое телесный угол? Что является единицей измерения телесного угла?

3. Что называют световым потоком?
4. В чем состоит модель точечного источника света?
5. Что такое сила света?
6. Что общего и в чем различие между понятиями «освещенность» и «яркость»?
7. Как формулируется первый закон освещенности?
8. Как формулируется второй закон освещенности?
9. Как изменится освещенность поверхности, если расстояние до источника света увеличится в два раза?
10. При каком условии справедливы законы освещенности?

Примеры решения задач

Задача 6.1

Вычислите световой поток, падающий на поверхность площадью 10 см^2 , расположенную на расстоянии 2 м от источника, сила света которого равна 200 кд .

Решение

Представим, что источник расположен в центре сферы радиусом r . Пусть S — площадь части сферической поверхности. Так как свет падает на выделенную площадку перпендикулярно, ее освещенность при силе света I такова:

$$E = \frac{I}{r^2}. \quad (6.21)$$

С другой стороны,

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (6.22)$$

Приравнивая правые части уравнений (6.21) и (6.22), получим

$$\Phi = \frac{IS}{r^2}, \quad \Phi = \frac{2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3}}{2^2} \text{ лм} = 0,05 \text{ лм}. \quad (6.23)$$

Задача 6.2

Круглый зал диаметром $D = 30 \text{ м}$ освещается лампой, укрепленной в центре потолка. Найдите высоту H зала, если известно, что наименьшая освещенность стены зала в два раза больше наименьшей освещенности пола.

Решение

Очевидно, что наименьшая освещенность стены зала будет в правом нижнем углу на стыке с полом (рис. 6.5).

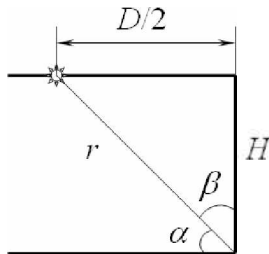


Рис. 6.5

По обобщенному закону освещенности она такова:

$$E_1 = \frac{I}{r^2} \cos \alpha. \quad (6.24)$$

Наименьшая освещенность пола

$$E_2 = \frac{I}{r^2} \cos \beta. \quad (6.25)$$

По условию задачи $E_1/E_2 = 2$. Отсюда получим

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{D}{2H} = 2, \quad H = \frac{1}{4} D = 7,5 \text{ м.} \quad (6.26)$$

Задача 6.3

Две электрические лампочки, поставленные рядом, освещают экран. Расстояние от лампочек до экрана $r_1 = 1$ м. Одну лампочку погасили. На сколько нужно приблизить экран, чтобы его освещенность не изменилась?

Решение

Пусть I — сила света одной лампочки. Освещенность экрана от двух лампочек определяется суперпозицией освещенностей:

$$E_0 = E_1 + E_2 = \frac{2I}{r_1^2}, \quad (6.27)$$

где E_1 и E_2 — освещенности экрана, создаваемые каждой лампочкой отдельно (рис. 6.6).

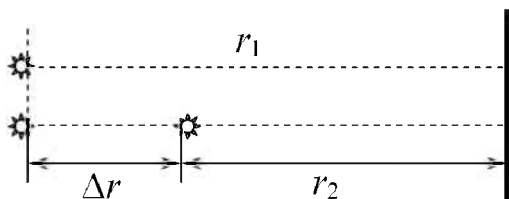


Рис. 6.6

После того как одну лампочку отключили, а вторую приблизили к экрану на расстояние r_2 , освещенность экрана стала такой:

$$E = \frac{I}{r_2^2}. \quad (6.28)$$

По условию задачи $E_0 = E$. Отсюда

$$r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, оставшуюся лампочку следует сместить к экрану на расстояние

$$\Delta r = r_1 - r_2 = r_1 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \Delta r = 0,3 \text{ м.} \quad (6.29)$$

Задача 6.4

На высоте $H_1 = 2$ м над серединой круглого стола диаметром $D = 3$ м висит лампа, сила света которой $I_1 = 100$ кд. Вместо нее повесили лампу, сила света которой $I_2 = 25$ кд, причем на такой высоте, что освещенность середины стола осталась прежней. Как изменится освещенность края стола?

Решение

Пусть H_2 — высота второй лампы над столом. Освещенность середины стола до и после замены лампы одинакова (рис. 6.7):

$$E = \frac{I_1}{H_1^2} = \frac{I_2}{H_2^2}. \quad (6.30)$$

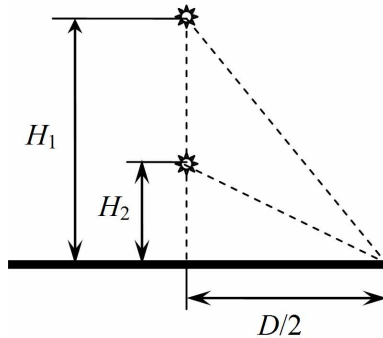


Рис. 6.7

Освещенность края стола в первом и втором случаях соответственно такова:

$$E_1 = \frac{I_1 H_1}{(H_1^2 + D^2/4)^{3/2}}, \quad E_2 = \frac{I_2 H_2}{(H_2^2 + D^2/4)^{3/2}}. \quad (6.31)$$

Отсюда

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{[H_1^2 + (I_1/I_2)D^2/4]^{3/2}}{(H_1^2 + D^2/4)^{3/2}}, \quad \frac{E_1}{E_2} = 3. \quad (6.32)$$

Таким образом, освещенность края стола уменьшится в три раза.

Задача 6.5

На какой угол нужно повернуть площадку, чтобы ее освещенность уменьшилась вдвое по сравнению с той освещенностью, которая была при перпендикулярном падении лучей?

Решение

Если I — сила света, а r — расстояние от источника света до площадки, то освещенность площадки при перпендикулярном падении луча света такова:

$$E_1 = \frac{I}{r^2}. \quad (6.33)$$

Освещенность той же площадки при наклонном падении луча света

$$E_2 = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (6.34)$$

Но по условию задачи $E_2 = 0,5 E_1$. Используя выражения (6.33) и (6.34), получаем

$$\frac{I \cos \alpha}{r^2} = 0,5 \frac{I}{r^2}, \quad \cos \alpha = 0,5, \quad \alpha = 60^\circ. \quad (6.35)$$

Задача 6.6

Электрическая лампа, сила света которой $I = 100$ кд, заключена в матовый сферический плафон диаметром $D = 5$ см. Найдите светимость и яркость лампы. Поглощением света стеклом плафона можно пренебречь.

Решение

Площадь поверхности плафона

$$S = \pi D^2.$$

Светимость источника определяется отношением излучаемого светового потока Φ к площади плафона S :

$$R = \frac{\Phi}{S}. \quad (6.36)$$

Поскольку свет излучается в полный телесный угол $\omega = 4\pi$,

$$\Phi = I\omega = 4\pi I.$$

Тогда с учетом выражения (6.36) светимость такова:

$$R = \frac{4\pi I}{\pi D^2} = \frac{4I}{D^2}, \quad R = 1,6 \cdot 10^5 \frac{\text{лм}}{\text{м}^2}. \quad (6.37)$$

Яркость лампы определим по формуле (6.12), учитывая, что лучи света испускаются лампой в радиальном направлении ($\cos \alpha = 1$) в полный телесный угол:

$$B = \frac{\Phi}{4\pi S}. \quad (6.38)$$

Сравнивая выражения (6.36) и (6.38), получим

$$B = \frac{R}{4\pi}, \quad B = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{кд}}{\text{м}^2}. \quad (6.39)$$

Рекомендуемая литература

Бутиков, Е.И. Физика. В 3 т. Т. 1. Механика / Е.И. Бутиков, А.С. Кондратьев. — М.: Физматлит, 2004. — 352 с.

Исакович, М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. — М.: Наука, 1973. — 496 с.

Исаченко, В.П. Теплопередача / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. — М.: Энергоиздат, 1981. — 415 с.

Касаткина, И.Л. Репетитор по физике: в 2 т. / И.Л. Касаткина, Н.А. Ларцева, Т.В. Шкиль. — Ростов н/Д.: Феникс, 1995.

Крейт, Ф. Основы теплопередачи / Ф. Крейт, У. Блэк. — М.: Мир, 1983. — 512 с.

Лепендин, Л.Ф. Акустика / Л.Ф. Лепендин. — М.: Высш. шк., 1978. — 448 с.

Мустафаев, Р.А. Физика. В помощь поступающим в вузы / Р.А. Мустафаев, В.Г. Кривцов. — М.: Высш. шк., 1989. — 496 с.

Мякишев, Г.Я. Физика. Механика. 10 класс / Г.Я. Мякишев. — М.: Дрофа, 2001. — 496 с.

Мякишев, Г.Я. Физика. Колебания и волны. 11 класс / Г.Я. Мякишев, А.З. Синяков. — М.: Дрофа, 2001. — 288 с.

Мякишев, Г.Я. Физика. Оптика. Квантовая физика. 11 класс / Г.Я. Мякишев, А.З. Синяков. — М.: Дрофа, 2001. — 464 с.

Мясников, С.П. Пособие по физике / С.П. Мясников, Т.Н. Осанова. — М.: Высш. шк. 1988. — 399 с.

Парфентьева, Н.А. Физика. В 2 т. Т. 1 / Н.А. Парфентьева, М.Ф. Фомина. — Минск: Альфа, 1995. — 368 с.

Сборник задач по элементарной физике / Б.Б. Буховцев, В.Д. Кривченков, Г.Я. Мякишев, И.М. Сараева. — М.: Наука, 1987. — 416 с.

Физический энциклопедический словарь / гл. ред. А.М. Прохоров. — М.: Сов. энцикл., 1983. — 928 с.

Учебное издание

Черняк Владимир Григорьевич

ИЗБРАННЫЕ ГЛАВЫ ФИЗИКИ

Учебное пособие

Заведующий редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Е. И. Маркина*
Корректор *Е. И. Маркина*
Компьютерная верстка *В. Г. Черняк*

Подписано в печать 29.03.2019 г. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 16,5.
Уч.-изд. л. 10,8. Тираж 40 экз. Заказ 28.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 389-94-79, 350-43-28
E-mail: gio.marina.ovechkina@mail.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13
Факс: +7 (343) 358-93-06
<http://print.urfu.ru>

Для заметок

